

UNIVERSITÄT AUGSBURG
Institut für Physik

Der Stehaufkreisel

Zulassungsarbeit zum 1. Staatsexamen

vorgelegt von
Christian Friedl
am
26. November 1997

Referent: Prof. Dr. G.-L. Ingold

Das Bild wurde aus Speicherplatzgründen hier nicht mit aufgenommen, ist aber dem Artikel von Cohen [5] zu entnehmen.

Der Stehaufkreisel begeistert kleine und große Kinder. Hier beobachten die beiden Nobelpreisträger Wolfgang Pauli (links) und Niels Bohr einen Stehaufkreisel bei der Eröffnung des Instituts für Theoretische Physik in Lund, Schweden im Jahre 1952.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Physikalischer Hintergrund	3
1.1 Modellbildung	3
1.2 Der Reibungsansatz	6
1.2.1 Ein Ausflug in die Elastizitätstheorie	6
1.2.2 Die Dissipationsfunktion	7
1.3 Bewegungsgleichungen	12
1.4 Eine Quasi-Erhaltungsgröße	17
1.5 Auflösung nach den 2. Ableitungen	19
2 Analyse der Bewegung	20
2.1 Stationäre Zustände	20
2.2 Charakterisierung von asymptotischen Zuständen	21
2.3 Stabilitätsanalyse	23
2.4 Existenz von Zwischenzuständen	25
3 Der Stehaufkreisel mit Stift	28
4 Diskussion der numerischen Ergebnisse	32
Schlußbetrachtung	50
A Näherungsweise Berechnung von $\dot{\varphi}(\vartheta)$ sowie $\dot{\psi}(\vartheta)$	51
B Klassifizierung von stationären Zwischenzuständen	54
Abbildungsverzeichnis	57
Literaturverzeichnis	58

Einleitung

Diese Arbeit untersucht die Bewegung des Stehaufkreisels (tippe top), dessen eigenartiges Verhalten seit jeher gleichermaßen Verblüffung wie Interesse hervorruft.

Obwohl der Kreisel einen einfachen Aufbau, ganz ähnlich wie das bekannte Stehaufmännchen, aufweist, zeigt das dynamische Verhalten völlig unerwartete Effekte, welche aus den überaus komplizierten Bewegungsgleichungen resultieren, aber anschaulich zunächst überhaupt keine Erklärung finden. Dieses komplexe Verhalten fasziniert Kinder wie auch Nobelpreisträger (Titelbild) und war auch für mich der Antriebsgrund für die Beschäftigung mit diesem wunderschönen Thema.

Das Problem „tippe top“ ist ein recht altes, und vor allem in den frühen fünfziger Jahren gab es zahlreiche Untersuchungen zu diesem Thema [1–4]. Allerdings war die analytische Behandlung auf mehr oder weniger genaue Näherungen beschränkt, deren Qualität sich nicht durch Computerberechnungen überprüfen ließ. Viel einschneidender ist jedoch die Tatsache, daß die für die theoretische Physik so charakteristische Frage nach den Prinzipien und dem *warum* des Aufrichtens bis in jüngster Zeit nur unvollständig und spekulativ behandelt wurde. Selbst die detaillierten Analysen von Cohen [5] und Or [6] liefern keine Erklärung für den Aufrichtungsvorgang. Erst H. Leutwyler [7] und darauf aufbauend Ebenfeld [8] haben eine analytische Begründung für die Aufrichtung geliefert; in unserer Arbeit wollen wir diese Ideen aufgreifen und weiterentwickeln, wobei vor allem zwei Ziele verfolgt werden:

1. Eine weitgehend analytische Behandlung mit Erklärung des Aufrichtungsvorganges,
2. Eine möglichst realitätsnahe Beschreibung mit Berücksichtigung der relevanten Einflüsse.

Zum zweiten Punkt ist noch folgendes anzumerken: Alle Autoren bis auf [1], [9] sowie [10] modellieren den Stehaufkreisel als inhomogene Kugel, bei der Schwerpunkt und Kugelmittelpunkt nicht zusammenfallen. Lediglich Hugenholtz [1] behandelt das Aufrichten auf den Stift analytisch, allerdings unter einigen sehr

restriktiven Voraussetzungen (u. a. Gleichheit aller drei Hauptträgheitsmomente). Dabei ist es gerade der Übergang auf den Stift, was den Reiz dieses Spielzeugs ausmacht und demzufolge in dieser Arbeit besondere Beachtung findet.

Zum Aufbau noch folgende Erläuterung: Wir werden zunächst ein Modell eines Stehaufkreisels mit Stift entwickeln, welches als Besonderheit eine Berührungsfläche zwischen Kreisel und Unterlage enthält. Die Differentialgleichungen der Bewegung werden mittels Lagrange- und Dissipationsfunktion aufgestellt. In Kapitel 2 erfolgt eine detaillierte Untersuchung der Bewegungsformen insbesondere über das Langzeitverhalten und wir führen eine Stabilitätsanalyse durch. In Kapitel 3 betrachten wir das Aufrichten auf den Stift genauer und leiten Bedingungen ab, mit deren Hilfe sich bereits aus den Startwerten beim Anwerfen des Kreisels eine Aussage machen läßt, ob der Kreisel die invertierte Position auf dem Stift erreichen kann. Schließlich vergleichen wir die Computerberechnungen mit unserer Analyse und diskutieren die numerischen Ergebnisse.

Noch ein Wort zur Anwendbarkeit im Schulunterricht: Auch wenn die Behandlung dieses Themas als Zulassungsarbeit notwendigerweise ein gewisses Maß an mathematischem Formalismus erfordert und demzufolge der Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die Schule naturgemäß Grenzen gesetzt sind, so ist doch die Faszination der Kreiselbewegung im allgemeinen ein ausgezeichneter Ausgangspunkt im Hinblick auf das Wecken von naturwissenschaftlichem Interesse bei Schülern.

An dieser Stelle fällt mir ein Wort ein, welches M. Berry in seinem Büchlein „Kosmologie und Gravitation“ im Vorwort an seine Studenten richtet und welches sinngemäß auf die Beschäftigung mit dem Spielzeug Stehaufkreisel aus reiner Neugier übertragen werden kann:

„Es hilft ihnen nicht bei der Suche nach einem Arbeitsplatz oder beim Bau von Einrichtungen militärisch-industrieller Art und vergrößert auch nicht das Bruttosozialprodukt. Aber es trägt, so hoffe ich, dazu bei, den alten Gedanken wiederzubeleben, daß die Physik vor allem „Naturphilosophie“ sein sollte.“

Kapitel 1

Physikalischer Hintergrund

1.1 Modellbildung

Für den Stehaufkreisel wurde folgendes Modell entwickelt: Der „Hauptkörper“ besteht aus einer abgeschnittenen Kugel mit Radius r und einer eventuellen zylindrischen Ausfräsung um die Mittelpunktsachse. Diese Ausfräsung bewirkt eine Vergrößerung des Abstandes Schwerpunkt – Kugelmittelpunkt; ein Umstand der — wie wir noch sehen werden — von Bedeutung ist.

Darauf aufgesetzt ist ein Stift, dessen Abschluß eine Halbkugel mit Radius r' bildet, (siehe Abbildung 1.1). Die Abbildung 1.2 zeigt die Lage des Kreisels

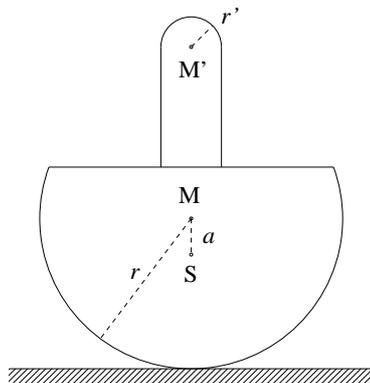


Abbildung 1.1: Querschnitt des Kreisels

im Inertialsystem, die eingezeichneten Winkel sind die bekannten Eulerwinkel (\overline{ON} beschreibt die Knotenlinie). Die drei Hauptträgheitsmomente $I_1 = I_2$ (aus Symmetriegründen) und I_3 sowie der Schwerpunktsabstand a vom Hauptkugel-

liefern kann. Die einzige horizontale Kraft, welche überhaupt in Frage kommt, ist aber die Reibungskraft, weshalb ein Modell Reibungsverluste berücksichtigen muß. Des weiteren lehrt die Beobachtung, daß sich der Kreisel in der invertierten Position (d. h. Kreisel steht senkrecht auf dem Stift) nicht allzulange halten kann. Aus diesem Grunde wurde bei der Modellbildung eine Berührungsfläche zwischen Kreisel und Unterlage angesetzt. Dies läßt sich nur realisieren, wenn die elastischen Eigenschaften von Kreisel und Boden berücksichtigt werden. Abbildung 1.4 zeigt einen Querschnitt des Kreisels mit übertriebener Darstellung der Verformung des Bodens.

Diese Elastizität ist auch in anderer Hinsicht von Bedeutung: Zahlreiche Versuche und vorhergehende Untersuchungen [10] haben gezeigt, daß der Kreisel gelegentlich vom Boden abhebt (was sich akustisch durch Rattern bemerkbar macht); in seltenen Fällen ist ein solcher Luftsprung auch mit bloßem Auge erkennbar! Um nun das Abheben und Aufschlagen auf den Boden realistisch zu simulieren sind elastische Eigenschaften unumgänglich.

Bemerkung:

Die Berücksichtigung der Elastizität des Kreisels tut dem Modell „starrer Körper“ natürlich keinen Abbruch, da die Idealisierungen (insbesondere Konstanz der Hauptträgheitsmomente) bei solch winzigen Deformationen auch weiterhin hervorragend gewährleistet sind.

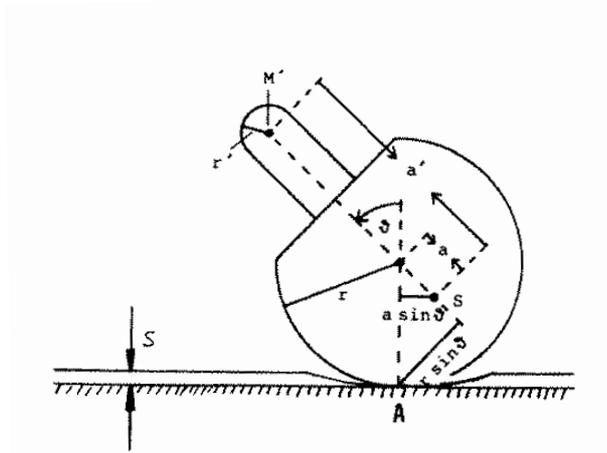


Abbildung 1.4: Geneigter Kreisel mit Verformung des Bodens

1.2 Der Reibungsansatz

1.2.1 Ein Ausflug in die Elastizitätstheorie

Um nun das durch die reine Bohrreibung verursachte Reibungsdrehmoment berechnen zu können, ist es erforderlich, die Form und die Größe des Berührungsbereiches sowie die Druckverteilung in demselben zu kennen. Folgende Abbildung zeigt einen Querschnitt zweier Körper unter dem Wirken von Normalkräften. Die Oberflächen der beiden Körper werden hierbei durch die Hauptkrümmungsradien des vormaligen Berührungspunktes charakterisiert.

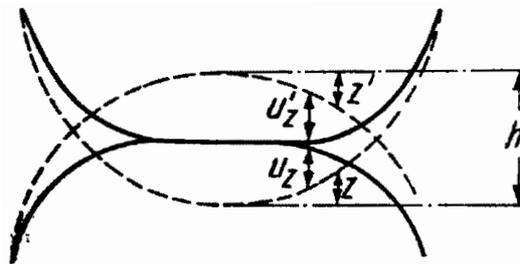


Abbildung 1.5: Querschnitt zweier Körper unter dem Wirken von Normalkräften

Das Problem der Berührung zweier Körper unter dem Einfluß reiner Normalkräfte wurde bereits sehr früh von Heinrich Hertz untersucht und führt zu den bekannten Hertz'schen Formeln, welche durch Experimente vollauf bestätigt wurden.

Die Herleitung nachfolgender Beziehungen ist ein schwieriges und umfangreiches Unterfangen (siehe z. B. [11] bzw. [12]); da für die weitere Rechnung nur die Ergebnisse von Bedeutung sind, werden diese ohne Beweis angegeben.¹ Die Verformung beider Körper berechnet sich zu

$$h = \frac{(FD)^{2/3}}{r^{1/3}} \quad (1.1)$$

$$\text{mit } D = \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \sigma^2}{E} + \frac{1 - \sigma'^2}{E'} \right) \quad (1.2)$$

wobei

- F : Normalkraft
- r : Radius der Hauptkugel aus Abbildung 1.4
- E, E' : Elastizitätsmodul von Kreisel bzw. Unterlage
- σ, σ' : Querkontraktionszahl (Poissonscher Modul) von Kreisel bzw. Unterlage

¹Für die Hauptkrümmungsradien der Unterlage (=Tischplatte) wurde $\rho = \infty$ eingesetzt.

Aus (1.1) erhält man das Potential V der Verformung zu

$$V = \frac{2\sqrt{r}}{5D}h^{5/2}. \quad (1.3)$$

Hier sei noch erwähnt unter welchen Voraussetzungen obige Formeln abgeleitet wurden:

- homogene, isotrope Materialien,
- alleinige Wirkung von Normalspannungen in der Berührungsfläche,
- die Deformation ist klein gegenüber den Körperabmessungen.

Bevor wir zur Berechnung der Dissipationsfunktion übergehen, noch ein kleines Rechenbeispiel, um ein Gefühl für die auftretenden Größen zu erhalten

$$\begin{aligned} E &= E' = E_{\text{Fichte}} \approx 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \\ \sigma &= \sigma' \approx 0.1, \\ r &= 2,5 \cdot 10^{-2} \text{m}, \\ m &= 15 \cdot 10^{-3} \text{kg}, \\ F &= mg, \\ \implies h &= 1.24 \cdot 10^{-8} \text{m}. \end{aligned}$$

Die Berührkreisfläche besitzt aus geometrischen Gründen einen Radius von etwa $R = \sqrt{2rh}$. Mit obigen Werten folgt hieraus $R = 2.49 \cdot 10^{-5} \text{m}$. Dies bedeutet, das Berührungsgebiet wird durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius lediglich etwa 0,025mm beträgt.

1.2.2 Die Dissipationsfunktion

Wie bereits erwähnt, spielt Reibung beim Verhalten des Stehaufkreisels eine entscheidende Rolle. Genauere Untersuchungen dieses Aspekts (siehe [6]) haben gezeigt, daß das seltsame Verhalten des Kreisels ausschließlich durch Gleitreibung verursacht wird und Rollreibung praktisch unbedeutend ist.

Wie kommt man nun zu einem Reibungsansatz unter Berücksichtigung einer Berührungsfläche? Hierzu betrachten wir zunächst eine homogene Kreisscheibe der Dichte ρ , Höhe h und Radius R , welche sich unter dem Einfluß der Gewichtskraft sowie Coulomb-Reibung in y -Richtung bewegt. Der Translationsbewegung sei noch eine Rotationsbewegung mit nicht notwendigerweise konstanter Winkelgeschwindigkeit ω überlagert. Abbildung 1.6 verdeutlicht diesen Sachverhalt. Bevor wir die resultierende Reibungskraft berechnen, noch ein kurzer Einschub

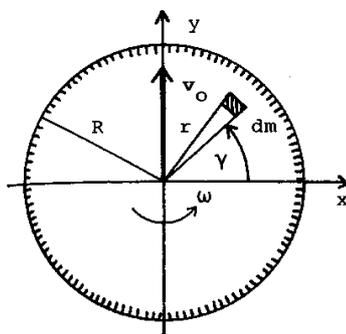


Abbildung 1.6: Überlagerung von Rotation und Translation

über generalisierte Reibungskräfte und deren Zusammenhang mit der sogenannten Dissipationsfunktion:

Im Vorgriff auf Abschnitt 1.3 werden bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen die generalisierten Reibungskräfte R_j benötigt. Diese werden über eine Dissipationsfunktion berechnet, welche die kartesischen Reibungskräfte in verallgemeinerte R_j umwandelt. Die Dissipationsfunktion läßt sich leicht bestimmen, wenn die Reibungskraft folgende Form besitzt

$$\vec{R} = -h(v) \vec{e}_v. \quad (1.4)$$

So gilt etwa für Coulomb-Reibung (Festkörperreibung)

$$h(v) = f F_N, \quad (1.5)$$

hierbei ist f der Gleitreibungskoeffizient und F_N die Normalkraft. Ganz allgemein ergibt sich die Dissipationsfunktion zu (Herleitung z. B. in [9])

$$P = \sum_{i=1}^N \int_0^{v_i} h_i(v'_i) dv'_i, \quad (1.6)$$

wobei N die Anzahl der Teilchen bezeichnet. Die Dissipationsfunktion P spielt des weiteren auch eine ähnliche Rolle wie das Potential, denn es gilt $R_j = -\partial P / \partial \dot{q}_j$.

Betrachten wir nun von der Kreisscheibe ein Massenelement $dm = \rho h r d\gamma dr$ (entspricht in (1.6) einem Teilchen), so lautet die differentielle Dissipationsfunk-

tion für dieses Massenelement

$$\begin{aligned} dP &= \int_0^v f dm g dv' = f g v dm, \\ \Rightarrow P &= f g h \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R r d\gamma dr \sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2 + 2r\omega v_0 \cos \gamma}, \end{aligned}$$

bei reiner Rotation ($v_0 = 0$) ergibt sich

$$P_{\text{rot}} = f m g \frac{2}{3} R \omega. \quad (1.7)$$

Für den Betrag der Reibungskraft in Bewegungsrichtung erhalten wir die Integraldarstellung

$$R_y = \frac{\partial P}{\partial v_0} = f g h \rho \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{v_0 + \omega r \cos \gamma}{\sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2 + 2r\omega v_0 \cos \gamma}} r d\gamma dr. \quad (1.8)$$

Will man nun obiges Doppelintegral auswerten, so stößt man bald auf elliptische Integrale, deren Lösung bekanntlich nicht durch die Grundfunktionen darstellbar ist. Durch Reihenentwicklung des Integranden läßt sich jedoch R_y als Reihe darstellen, welche überdies sehr schnell konvergiert. Die Berechnung des Integrals ist mühsam und langwierig, ohne neue Einsichten zu vermitteln, deshalb sei an dieser Stelle nur das Ergebnis mitgeteilt:

$$R_y = \begin{cases} f m g \left[u - \frac{1}{8} u^3 - \frac{1}{64} u^5 - \frac{5}{1024} u^7 - \frac{35}{16384} u^9 - \dots \right] & \text{für } u < 1, \\ f m g \left[1 - \frac{1}{8u^3} - \frac{1}{64u^5} - \frac{5}{1024u^7} - \frac{35}{16384u^9} - \dots \right] & \text{für } u \geq 1, \end{cases}$$

mit $u = v_0/\omega R$.

Die bisherigen Ergebnisse lassen sich leicht auf beliebige Druckverteilungen im Berührungsgebiet verallgemeinern. Unter Berücksichtigung der Elastizität von Kreisel und Unterlage ergibt sich nach Hertz [11] die radiale Druckabhängigkeit im Berührungskreis zu

$$p(r) = \frac{3F}{2\pi R^2} \sqrt{1 - r^2/R^2}. \quad (1.9)$$

Setzt man für die Normalkraft F wieder die Gewichtskraft ein, so erhält man die modifizierte Dissipationsfunktion

$$P = f \frac{3mg}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R r d\gamma dr \sqrt{1 - r^2/R^2} \sqrt{v_0^2 + (r\omega)^2 + 2r\omega v_0 \cos \gamma}. \quad (1.10)$$

Für $v_0 = 0$ ergibt sich hier

$$P_{\text{rot}} = fmg \frac{3\pi}{16} R\omega. \quad (1.11)$$

Vergleichen wir (1.11) mit (1.7), so sieht man sofort, daß kaum ein Unterschied besteht; dies gilt auch für die Reibungskraft R_y , wie die numerische Integration zeigt. Die Kurve a in Abbildung 1.7 bezieht sich auf gleichmäßige Druckverteilung, b dagegen auf radiale Druckabhängigkeit.

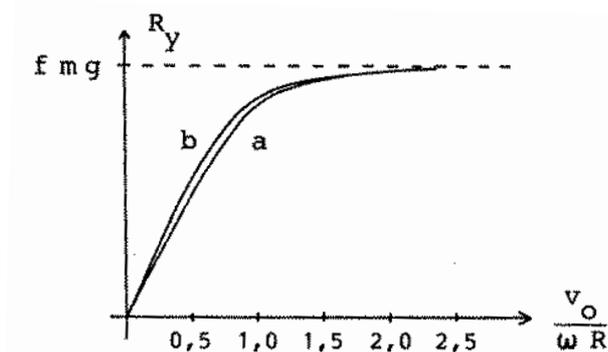


Abbildung 1.7: Reibungskraft in Abhängigkeit von u (aus [9])

In Anbetracht der späteren Berechnung der generalisierten Reibungskräfte ist eine Reihen- oder Integraldarstellung der Dissipationsfunktion natürlich unvorteilhaft. Ein Blick auf Abbildung 1.7 zeigt uns jedoch einen Ausweg aus dem Dilemma. Es bietet sich an, R_y durch die hyperbolische Tangens-Funktion zu approximieren, also

$$R_y = fmg \tanh\left(\frac{pv_0}{\omega R}\right), \quad (1.12)$$

p ist hierbei ein dimensionsloser Fit-Parameter in der Größenordnung von 1. Hieraus ergibt sich schließlich eine zweckmäßige Darstellung der Dissipationsfunktion

$$P = fmg \frac{3}{16} \pi R \omega + fmg \frac{\omega R}{p} \ln \cosh \left(\frac{p v_0}{\omega R} \right)$$

Der Übergang zur Rayleighschen Dissipationsfunktion des Stehaufkreisels geschieht durch

$\omega \longrightarrow \omega_z$ (z -Komponente der Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem),

$v_0 \longrightarrow v_R$ (Relativgeschwindigkeit Berührungskreismittelpunkt–Boden),

$g \longrightarrow g_{\text{eff}} = g + \ddot{z}_s$ (z_s : z -Koordinate des Schwerpunktes).

Bemerkung:

Bei der Herleitung der Dissipationsfunktion wurden einige Annahmen gemacht, welche nicht exakt erfüllt sind, bzw. einige Effekte vernachlässigt. Dies sind im einzelnen:

- Holz als Kreiselmaterial ist kein isotroper Körper.
- Das Berührungsgebiet zwischen Kreisel und Unterlage ist im allgemeinen kein Kreis sondern eine schwach gekrümmte Fläche (in diesem Sinne ist der Berührungskreisradius R auch als *mittlerer* bzw. *effektiver* Radius zu verstehen).
- Es wirkt nicht nur die Normalkraft, sondern — bedingt durch die Reibungskraft — auch eine tangentielle Komponente. Diese ist allerdings um den Faktor $1/f$ kleiner als die Normalkraft.
- Für v_R wird die Relativgeschwindigkeit des idealen starren Körpers eingesetzt (entspricht Berührungspunkt statt Berührfläche).
- Die Luftreibung wurde vernachlässigt, ebenso
- Staubpartikel zwischen Kreisel und Unterlage.

Einige dieser Einflüsse mögen sich kompensieren, andere wiederum verstärken. Überdies hinaus steckt in der Dissipationsfunktion eine weitere Approximation. Insgesamt dürften jedoch die wahren Verhältnisse recht gut wiedergegeben werden, wie uns die numerischen Berechnungen noch zeigen werden.

1.3 Bewegungsgleichungen

Zur Beschreibung der Bewegung bietet es sich an, neben dem Inertialsystem noch ein weiteres, körperfestes Bezugssystem mit Ursprung im Schwerpunkt zu gebrauchen. Die körperfeste 3-Achse fällt dabei mit der Figurenachse zusammen.

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen unter Berücksichtigung von Reibung eignet sich in idealer Weise der Lagrangeformalismus 2. Art. Als generalisierte Koordinaten verwenden wir die drei Eulerwinkel φ, ϑ, ψ sowie die Schwerpunktkoordinaten x_s, y_s und z_s .

Um die Rotationsenergie in der Lagrangefunktion zu ermitteln, ist die Kenntnis der *körperfesten* Komponenten der Winkelgeschwindigkeit erforderlich; für die Berechnung der Relativgeschwindigkeit Kreiselaufgabe–Boden hingegen wird die Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem benötigt. Die Winkelgeschwindigkeiten im jeweiligen Bezugssystem lauten

raumfest:

$$\vec{\omega}_I = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \sin \vartheta \\ \dot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

körperfest:

$$\vec{\omega}_{BS} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \sin \psi \sin \vartheta + \dot{\vartheta} \cos \psi \\ \dot{\varphi} \cos \psi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Die kinetische Energie beträgt

$$T = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{I_1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{I_3}{2} \omega_3^2. \quad (1.15)$$

Zur Ermittlung der potentiellen Energie muß man sich in Erinnerung rufen, daß sich Kreisel und Unterlage unter Einfluß von Normalkräften um die Strecke h nähern. Es gilt also

$$z_s = r - a \cos \vartheta - h \implies h = r - a \cos \vartheta - z_s.$$

Mit Gleichung (1.3) erhalten wir nun sofort die Lagrangefunktion

$$\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + \dot{z}_s^2) \\
&\quad + \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \\
&\quad - mgz_s - \frac{2\sqrt{r}}{5D}(r - a \cos \vartheta - z_s)^{5/2}
\end{aligned}$$

Für die Relativgeschwindigkeit \vec{v}_R in der Dissipationsfunktion wird — wie bereits erwähnt — zur Vereinfachung ein Auflagepunkt vorausgesetzt; somit berechnet sich \vec{v}_R zu

$$\vec{v}_R = \vec{v}_s + \vec{\omega}_I \times \vec{r}_A,$$

wobei \vec{r}_A = Vektor vom Schwerpunkt zum Auflagepunkt A . Mit

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} a \sin \varphi \sin \vartheta \\ -a \cos \varphi \sin \vartheta \\ a \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

folgt

$$\vec{v}_R = \begin{pmatrix} \dot{x}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\vartheta}(a \cos \vartheta - r) \sin \varphi \\ \dot{y}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \sin \varphi - \dot{\vartheta}(a \cos \vartheta - r) \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Hieraus erhalten wir schließlich die Dissipationsfunktion des Stehaufkreisels zu

$$P = fmg_{\text{eff}}\omega_z \left(\frac{3}{16}\pi R + \frac{R}{p} \ln \cosh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) \right), \quad (1.17)$$

hierbei sind

$$\begin{aligned}
g_{\text{eff}} &= g + \ddot{z}_s = \frac{\sqrt{r}}{mD}(r - z_s - a \cos \vartheta)^{3/2}, \\
\omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta, \\
v_R &= \left\{ \dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi})^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2(r - a \cos \vartheta)^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta (\dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi) \right. \\
&\quad \left. - 2\dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta)(\dot{x}_s \sin \varphi - \dot{y}_s \cos \varphi) \right\}^{1/2}. \quad (1.18)
\end{aligned}$$

In obiger Darstellung sind natürlich auch die Grenzfälle geschwindigkeitsproportionaler Reibung (Stokes-Reibung) sowie reiner Coulomb-Reibung enthalten

$$P = fmg_{\text{eff}} \left(\frac{3}{16} \pi R \omega_z + \frac{p v_R^2}{2 \omega_z R} \right) \quad \text{für } \frac{p v_R}{\omega_z R} \ll 1,$$

$$P = fmg_{\text{eff}} \left(\frac{3}{16} \pi R \omega_z + v_R - \frac{R \omega_z}{p} \ln 2 \right) \quad \text{für } \frac{p v_R}{\omega_z R} \gg 1.$$

Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden u. a. die verallgemeinerten Reibungskräfte $R_{q_j} = -\partial P / \partial \dot{q}_j$ benötigt. Diese lauten

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s} &= fmg_{\text{eff}} \tanh \frac{p v_R}{\omega_z R} \\ &\quad \times \frac{1}{v_R} \left[\dot{x}_s + (a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) \sin \varphi \right], \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s} &= fmg_{\text{eff}} \tanh \frac{p v_R}{\omega_z R} \\ &\quad \times \frac{1}{v_R} \left[\dot{y}_s + (a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) \cos \varphi \right], \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} &= fmg_{\text{eff}} \tanh \frac{p v_R}{\omega_z R} \\ &\quad \times \frac{1}{v_R} (r - a \cos \vartheta) \left[\dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) - \dot{x}_s \sin \varphi + \dot{y}_s \cos \varphi \right], \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} &= fmg_{\text{eff}} \left(\frac{3}{16} \pi R + \frac{R}{p} \ln \cosh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) - \frac{v_R}{\omega_z} \right. \\ &\quad \left. + \tanh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) \frac{a \sin \vartheta}{v_R} \left[(a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right), \\ \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} &= fmg_{\text{eff}} \left(\frac{3}{16} \pi R \cos \vartheta + \cos \vartheta \frac{R}{p} \ln \cosh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) - \frac{v_R}{\omega_z} \cos \vartheta \right. \\ &\quad \left. + \tanh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) \frac{r \sin \vartheta}{v_R} \left[(a \dot{\varphi} + r \dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right). \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die numerischen Berechnungen sind die Grenzfälle $R \rightarrow 0$ (Abheben des Kreisels von der Unterlage oder auch vorherrschende Coulomb-Reibung) sowie $v_R \rightarrow 0$ (momentane Drehachse verläuft durch Schwerpunkt und Berührungskreismittelpunkt) noch gesondert zu behandeln.

Für den bei Annäherung an den asymptotischen Zustand bedeutenden Fall

$u := pv_R/\omega_z R \ll 1$ erhalten wir

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{p}{\omega_z R} \left[\dot{x}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) \sin \varphi \right] \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{p}{\omega_z R} \left[\dot{y}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) \cos \varphi \right] \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{p}{\omega_z R} (r - a \cos \vartheta) \left[\dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) - \dot{x}_s \sin \varphi + \dot{y}_s \cos \varphi \right] \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} \approx fmg_{\text{eff}} \left\{ \frac{3}{16} \pi R - \frac{pv_R^2}{2\omega_z^2 R} \right. \\ \left. + \frac{p}{\omega_z R} a \sin \vartheta \left[(a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} \approx fmg_{\text{eff}} \left\{ \frac{3}{16} \pi R \cos \vartheta - \frac{pv_R^2}{2\omega_z^2 R} \cos \vartheta \right. \\ \left. + \frac{p}{\omega_z R} r \sin \vartheta \left[(a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Im Fall dominierender Coulomb-Reibung $u \gg 1$ ergibt sich

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{1}{v_R} \left[\dot{x}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) \sin \varphi \right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{1}{v_R} \left[\dot{y}_s + (a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) \cos \varphi \right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} \approx fmg_{\text{eff}} \frac{1}{v_R} (r - a \cos \vartheta) \left[\dot{\vartheta}(r - a \cos \vartheta) - \dot{x}_s \sin \varphi + \dot{y}_s \cos \varphi \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} \approx fmg_{\text{eff}} \left\{ \frac{3}{16} \pi R - \frac{R}{p} \ln 2 \right. \\ \left. + \frac{a}{v_R} \sin \vartheta \left[(a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} \approx fmg_{\text{eff}} \left\{ \frac{3}{16} \pi R \cos \vartheta - \frac{R}{p} \ln 2 \cos \vartheta \right. \\ \left. + \frac{r}{v_R} \sin \vartheta \left[(a\dot{\varphi} + r\dot{\psi}) \sin \vartheta + \dot{x}_s \cos \varphi + \dot{y}_s \sin \varphi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Diese Approximationen liefern bereits für $u < 0,5$ bzw. $u > 2$ gute Ergebnisse, was auch aus Abbildung 1.7 ersichtlich ist. Des Weiteren führt die Approximation der R_{q_j} nach der Differentiation $\partial P/\partial \dot{q}_j$ zu den gleichen Resultaten wie die Ableitung der entsprechenden genäherten Dissipationsfunktion P_{appr} . In Kurzform

bedeutet dies

$$\frac{\partial P_{\text{appr}}}{\partial \dot{q}_j} = \left(\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j} \right)_{\text{appr}} .$$

Da nun die erforderlichen Vorarbeiten geleistet sind, steht der Aufstellung der Bewegungsgleichungen nichts mehr im Wege. Führt man die Abkürzungen

$$L_{q_j} := \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_j}$$

ein, so lauten diese

$$L_\varphi = \frac{d}{dt} \left[I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta \right] + \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} = 0 \quad (1.24)$$

$$L_\vartheta = I_1 \ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (I_3 - I_1) + I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta \\ + (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2} \frac{\sqrt{r}}{D} a \sin \vartheta + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} = 0 \quad (1.25)$$

$$L_\psi = \frac{d}{dt} \left[I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \right] + \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} = 0 \quad (1.26)$$

$$L_{x_s} = m \ddot{x}_s + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s} = 0 \quad (1.27)$$

$$L_{y_s} = m \ddot{y}_s + \frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s} = 0 \quad (1.28)$$

$$L_{z_s} = m \ddot{z}_s + mg - \frac{\sqrt{r}}{D} (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2} = 0 \quad (1.29)$$

Diese Gleichungen beschreiben das Verhalten einer inhomogenen Kugel mit Radius r und dem Schwerpunktsabstand a vom Mittelpunkt, welche eine achsensymmetrische Massenverteilung aufweist. Sollte der Kreisel auf dem Stift stehen, so sind lediglich a durch a' sowie r durch r' zu ersetzen. Aus diesem Grunde können wir uns auch weiterhin auf diese inhomogene Kugel beschränken. Nur wenn beim Stehaufkreisel Stift und Hauptkugel gleichzeitig den Boden berühren (Doppelkontaktphase), sind neue Überlegungen notwendig. Hier sei auf Kapitel 3 verwiesen.

Wenn wir die gekoppelten Differentialgleichungen (1.24) bis (1.29) betrachten, so scheint es nahezu unmöglich, hiermit das seltsame Verhalten des Kreisels zu erklären; dennoch liefert uns der Lagrangeformalismus den Schlüssel zum Verständnis der Bewegung, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

1.4 Eine Quasi-Erhaltungsgröße

Von den in der Lagrangefunktion vorkommenden Variablen sind x_s , y_s sowie φ und ψ zyklische Koordinaten. In den Gleichungen (1.24) und (1.26) wurde die zeitliche Ableitung der eckigen Klammer (d.h. der Drehimpulse p_φ bzw. p_ψ) bewußt nicht ausgeführt, da diese beiden Gleichungen zu einer Quasi-Erhaltungsgröße führen! Subtrahiert man die mit a multiplizierte Gleichung (1.26) von der mit r multiplizierten Gleichung (1.24) so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}(r p_\varphi - a p_\psi) := \frac{d}{dt}(G) = - \left(r \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} - a \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} \right). \quad (1.30)$$

Mit Hilfe der Kettenregel sowie der Beziehung $r \partial v_R / \partial \dot{\varphi} = a \partial v_R / \partial \dot{\psi}$, welche aus (1.18) folgt, erhalten wir

$$\dot{G} = -f m g_{\text{eff}} (r - a \cos \vartheta) \frac{R}{p} \left\{ \frac{3\pi p}{16} + \ln \cosh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) - \frac{p v_R}{\omega_z R} \tanh \left(\frac{p v_R}{\omega_z R} \right) \right\}. \quad (1.31)$$

Für $R \rightarrow 0$ (verschwindende Bohrreibung) verschwindet auch \dot{G} und G geht in eine exakte Erhaltungsgröße („Jelett's Integral“) über!

Obige auf rein formalem Wege gewonnenen Ergebnisse lassen sich verallgemeinern, indem man sich die geometrische Bedeutung vor Augen führt: Die generalisierten Impulse p_φ und p_ψ sind die Projektionen des auf den Schwerpunkt bezogenen Drehimpulses \vec{L} auf die z -Achse bzw. auf die Figurenachse.

Betrachten wir einen Berührungspunkt, also verschwindender Berührkreisradius R , so wirken in diesem Reibungskräfte, welche wiederum ein Reibungsdrehmoment \vec{M} hervorrufen, wobei gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_\varphi &= -M_\varphi, \\ \frac{d}{dt} p_\psi &= -M_\psi. \end{aligned}$$

Die Minuszeichen sind Überbleibsel der vektoriellen Form und folgen auch aus den Gleichungen (1.24) bzw. (1.26). Zur Berechnung der Momente M_φ und M_ψ betrachten wir Abbildung 1.4.

Die Zeichenebene wird durch die Figurenachse, den Punkt A und eine zur z -Achse parallele Achse durch den Schwerpunkt bestimmt. Für die Größe von M_φ und M_ψ ist lediglich die Kraftkomponente F_\perp der Reibungskraft erforderlich, welche senkrecht auf der Zeichenebene und den entsprechenden Hebelarmen steht. Aus Abbildung 1.4 lesen wir ab

$$\begin{aligned} M_\varphi &= F_\perp a \sin \vartheta, \\ M_\psi &= F_\perp r \sin \vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(r p_\varphi - a p_\psi) &= 0, \\ \Leftrightarrow G = r p_\varphi - a p_\psi &= \text{const.} \end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß sich obige Erhaltungsgröße bei verschwindender Bohrrreibung völlig unabhängig von der jeweiligen Form des Reibungsgesetzes ergibt, sie ist also von bemerkenswerter Universalität!

Wenden wir uns nun wieder der Größe von \dot{G} bei nichtverschwindendem R zu. Bei fest vorgegebenem R läßt sich aus Gleichung (1.31) eine Abschätzung für \dot{G} und somit $G(t)$ gewinnen. Führen wir wieder die Abkürzung $u = p v_R / \omega_z R$ ein und bezeichnen die mit dem Faktor R/p multiplizierte geschweifte Klammer in Gleichung (1.31) mit $f(u)$, so zeigt eine elementare Kurvendiskussion, daß $f(u)$ streng monoton fallend ist und es gilt

$$R \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{\ln 2}{p} \right) \leq f(u) \leq \frac{3}{16}\pi R.$$

Für den relevanten Bereich

$$\frac{8 \ln 2}{3\pi} \leq p \leq \frac{16 \ln 2}{3\pi}$$

finden wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\dot{G}| &\leq f m g_{\text{eff}}(r + a) \frac{3}{16} \pi R =: k, \\ \Rightarrow G(t) &\leq G_0 + kt. \end{aligned}$$

Im ungünstigsten Fall, daß sich $G(t)$ von Anfang an mit dem größtmöglichen Wert der Steigung ändert, erhält man für den relativen Fehler

$$\frac{|G(t) - G_0|}{G_0} = \frac{kt}{G_0}.$$

Hierbei sind G_0 und k typischerweise von folgender Größenordnung

$$G_0 \simeq 10^{-5} \frac{\text{kg m}^3}{\text{s}} ; \quad k \simeq 10^{-7} \frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^2}.$$

Somit ergibt sich z. B. nach einer Zeit von 2 s ein maximaler relativer Fehler von wenigen Prozent. Diese Abschätzung rechtfertigt im Nachhinein erst die Bezeichnung „Quasi-Erhaltungsgröße“.

1.5 Auflösung nach den 2. Ableitungen

In Vorausschau auf die analytische Untersuchung der Bewegung sowie die numerische Behandlung ist es erforderlich, die Gleichungen (1.24) bis (1.29) nach den \ddot{q}_j aufzulösen. Bei den Gleichungen für L_φ und L_ψ ist die Verknüpfung von $\ddot{\varphi}$ und $\ddot{\psi}$ etwas verwickelt und die Entkoppelung geschieht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} &= I_1 \left(\ddot{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \\ &\quad + I_3 \left(\ddot{\varphi} \cos^2 \vartheta - 2\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta \cos \vartheta + \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\psi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta \right) \\ &\quad + \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} &= I_3 \left(\ddot{\varphi} \cos \vartheta - \dot{\varphi}\dot{\vartheta} \sin \vartheta + \ddot{\psi} \right) + \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Multipliziert man Gl. (1.33) mit $\cos \vartheta$ und zieht diese dann von Gl. (1.32) ab, so hebt sich der Term mit $\ddot{\psi}$ weg und wir können bequem nach $\ddot{\varphi}$ auflösen, was dann zu den Gleichungen (1.38) und (1.39) führt. (Man überzeugt sich durch Betrachtung von (1.32) und (1.33) auch leicht davon, daß die Gleichungen (1.38) und (1.39) auch für $\vartheta = \pi/2$ richtig sind.) Wir erhalten somit für die \ddot{q}_j die explizite Darstellung

$$\ddot{x}_s = -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s}, \quad (1.34)$$

$$\ddot{y}_s = -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s}, \quad (1.35)$$

$$\ddot{z}_s = -g + \frac{\sqrt{r}}{Dm} (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2}, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} &= \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{I_1} \left\{ I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta + (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2} \frac{\sqrt{r}}{D} a \sin \vartheta + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} \right\}, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I_1 \sin \vartheta} \left\{ (I_3 - 2I_1) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + I_3 \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \frac{\frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}} \cos \vartheta - \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}}}{\sin \vartheta} \right\}, \quad (1.38)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \frac{1}{I_3} \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}}. \quad (1.39)$$

Kapitel 2

Analyse der Bewegung

In diesem Kapitel werden auf analytischem Wege Kriterien für die Aufrichtung und für die Stabilität von gewissen Zuständen hergeleitet. Um überhaupt analytisch einige Aussagen über das Kreiselverhalten zu bekommen, ist es erforderlich von einer *exakten* Erhaltungsgröße auszugehen! Deshalb vernachlässigen wir ab hier die Verformung von Kreisel und Unterlage sowie die damit verbundene Bohrrreibung und beschränken uns auf die dominierende Gleitreibung, setzen allerdings weiterhin ein Reibungsgesetz mit der Eigenschaft $F_R = 0 \iff v_R = 0$ voraus, d. h. wir betrachten einen sehr kleinen, fest vorgegebenen Berührkreisradius, welcher uns obige Eigenschaft garantiert, es aber gleichzeitig gestattet, die Bohrrreibung zu vernachlässigen. Auf die Frage, inwieweit nachfolgende Ergebnisse auf elastische Körper zu übertragen sind — bzw. sich übertragen lassen — wird später eingegangen.

2.1 Stationäre Zustände

Die Grundidee zum Verständnis des Kreiselverhaltens stammt von H. Leutwyler [7] und lautet in abgewandelter Form folgendermaßen:

Aufgrund von Reibung wird die Energie abnehmen; die Erhaltungsgröße G verändert sich hierbei naturgemäß nicht. Deshalb muß die Bewegung in einen stationären Zustand konstanter Energie münden, welcher mit der Konstanz von G verträglich ist!

Wie wir gleich sehen werden hängt dann die Energie explizit nur noch vom Neigungswinkel ab und nimmt den kleinsten möglichen Wert an, welcher mit unserer Erhaltungsgröße konsistent ist.

Die Energiedissipation kommt genau dann zum Stillstand, wenn die Relativgeschwindigkeit \vec{v}_R verschwindet. Um die entsprechenden Beziehungen für die \dot{q}_j zu erhalten betrachten wir die Reibungsterme für sehr kleine v_R (Gleichun-

gen (1.19) bis (1.23)). Die Ausdrücke in den eckigen Klammern beschreiben die Geschwindigkeitskomponenten in x bzw. y -Richtung sowie die Anteile von \vec{v}_R , welche senkrecht zur Knotenlinie \overline{ON} bzw. in Richtung derselben verlaufen. Wir betrachten (1.21) genauer; mit Hilfe der Beziehung

$$-\dot{x}_s \sin \varphi + \dot{y}_s \cos \varphi = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2} \sin(\varphi + \varphi_0),$$

wobei

$$\tan \varphi_0 = -\frac{\dot{x}_s}{\dot{y}_s},$$

sowie

$$\varphi = \Omega t + \varphi_S ; \quad \vartheta = \omega t + \vartheta_S ; \quad \Omega, \omega, \varphi_S, \vartheta_S = \text{const}$$

(es liegt ein stationärer Zustand vor) folgt

$$\dot{\vartheta} r - \dot{\vartheta} a \cos \vartheta + \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2} \sin(\Omega t + \varphi_0 + \varphi_S) = 0.$$

Der Restterm ohne den konstanten Ausdruck $\dot{\vartheta} r$ beschreibt eine Schwingung mit zeitabhängiger Amplitude und Phase. Deswegen kann obige Gleichung nur für $\dot{\vartheta} = \dot{x}_s = \dot{y}_s = 0$ erfüllt sein!

Aus der Vektordarstellung (1.16) oder auch aus (1.18) können wir somit ablesen, daß genau zwei Fälle von stationären Zuständen auftreten können:

$$1. \text{ Fall: } \quad \vartheta = \text{const}, \quad r\dot{\psi} + a\dot{\varphi} = 0 \quad (2.1)$$

$$2. \text{ Fall: } \quad \vartheta = 0 \text{ oder } \pi, \quad r\dot{\psi} + a\dot{\varphi} \text{ beliebig} \quad (2.2)$$

Letztere Bedingung trifft auch für den Stehaufkreisel zu.

Das Ziel wird es also sein, Kriterien zu bestimmen, mit deren Hilfe man aus den Parameter- und Startwerten entscheiden kann, in welchen asymptotischen Zustand der Kreisel hineinlaufen wird.

2.2 Charakterisierung von asymptotischen Zuständen

Um einen Zusammenhang zwischen der kleinstmöglichen Energie E_{\min} und der Konstanten der Bewegung herzustellen, ist es zweckmäßig zur neuen Größe $J := G/r$ überzugehen welche die Dimension eines Drehimpulses besitzt. Mit der weiteren Abkürzung $\epsilon := a/r$ als Maß für die Exzentrizität des Schwerpunktes erhalten wir

$$J = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon) (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \quad (2.3)$$

Im ersten Fall $\vartheta = \text{const} =: \vartheta_C$, sowie $\dot{\psi} + \epsilon \dot{\varphi} = 0$, ergibt sich

$$E_{\min} = \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{I_3}{2} \dot{\varphi}^2 (\cos \vartheta - \epsilon)^2 + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta).$$

Die Erhaltungsgröße J hat dann folgendes Aussehen

$$\begin{aligned} J &= I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 \dot{\varphi} (\cos \vartheta - \epsilon)^2 \\ \implies E_{\min} &= \frac{J^2}{2J/\dot{\varphi}} + E_{\text{pot}} \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich

$$E_{\min}(\vartheta) = \frac{J^2}{2[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon)^2]} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta) \quad (2.4)$$

Man rechnet leicht nach, daß E_{\min} auch im Fall $\sin \vartheta = 0$ obige Darstellung besitzt, was bedeutet, daß alle stationären Zustände verschwindender Energie-dissipation durch Gleichung (2.4) beschrieben werden.

Wie gelangt man nun hieraus zu weiteren Aussagen über asymptotische Zustände, Stabilitätsverhalten etc.? Hierzu zerlegen wir die Gesamtenergie E in E_{\min} und einen Anteil E_{Diss} welcher für $v_R \rightarrow 0$ verschwindet

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} (\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + a^2 \dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta) \\ &\quad + \frac{I_1}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 \\ &\quad + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^2 &= I_1^2 \dot{\varphi}^2 \sin^4 \vartheta + 2I_1 I_3 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta (\cos \vartheta - \epsilon) (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \\ &\quad + I_3^2 (\cos \vartheta - \epsilon)^2 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\frac{J^2}{2[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon)^2]} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta) + E_{\text{Diss}} = E.$$

Diese Gleichung wird nach dem fehlenden „Restterm“ aufgelöst mit dem Ergebnis

$$\begin{aligned}
E &= E_{\min}(\vartheta) + \frac{m}{2}(\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2 + a^2\dot{\vartheta}^2 \sin^2 \vartheta) \\
&\quad + \frac{I_1}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{I_1 I_3 \sin^2 \vartheta (\dot{\psi} + \epsilon \dot{\varphi})^2}{2[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon)^2]}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Entfernen wir uns etwas von unserem asymptotischen Zustand, so kommen lauter quadratische Terme hinzu; deshalb können wir hieraus unmittelbar ablesen: Die Minima von $E_{\min}(\vartheta)$ führen zu Minima von E ; die Maxima oder Sattelpunkte von $E_{\min}(\vartheta)$ führen zu Sattelpunkten von E ! Das bedeutet, wir können uns im folgenden auf die Kurvendiskussion von $E_{\min}(\vartheta)$ beschränken.

Obiges Resultat stellt einen ganz entscheidenden Schritt für unsere weiteren Untersuchungen dar, insbesondere für die gleich folgende Stabilitätsanalyse, welche wir im Sinne der Ljapunovschen Stabilitätsdefinition (siehe etwa [13] oder [14]) durchführen werden. Hierzu zunächst einige Vorbemerkungen: Die (Gesamt-) Energie stellt eine Ljapunov-Funktion dar, da die Bedingungen

$$E(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) > 0, \tag{2.6}$$

$$\frac{d}{dt}E(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t)) \leq 0, \tag{2.7}$$

erfüllt sind. Ferner gilt im asymptotischen Zustand $E = E_{\min}$ (bzw. nach einer Koordinatentransformation $E(\vec{0}) = 0$).

Nach dem ersten Stabilitätstheorem von Ljapunov ist ein stationärer Zustand genau dann stabil, wenn die Energie (unsere Ljapunovfunktion) dort ein lokales Minimum aufweist, was nach obigen Überlegungen gleichbedeutend mit einem lokalen Minimum von $E_{\min}(\vartheta)$ ist!

Um die Instabilität eines Sattelpunktes von $E(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t))$ zu zeigen, greifen wir auf die ursprüngliche Definition von Ljapunov zurück. Hierzu betrachten wir zwei anfangs dicht nebeneinander liegende Trajektorien, wobei eine (zunächst) in den Sattelpunkt hineinläuft, die Bahn der zweiten jedoch „unterhalb“ des Sattelpunktes verläuft und somit die Bewegung im Phasenraum weiterhin „abwärts“ erfolgt. Dies bedeutet benachbarte Trajektorien bleiben nicht benachbart und somit kann keine Stabilität im Ljapunovschen Sinne vorliegen, was auch durch Flußbetrachtungen im Phasenraum unmittelbar einsichtig ist.

2.3 Stabilitätsanalyse

Eine sinnvolle Definition eines Stehaufkreisels muß neben der Stabilität bei $\vartheta = \pi$ auch die Instabilität bei $\vartheta = 0$ fordern. Deshalb beschränken sich die nachfolgenden Berechnungen zunächst auf vertikal rotierende symmetrische Kreisel.

Anschließend werden wir die „Zwischenzustände“, gekennzeichnet durch (2.1), insbesondere deren Existenz genauer untersuchen.

Wie wir gesehen haben, beschränkt sich die Stabilitätsanalyse im wesentlichen auf eine Differentiationsübung. Es mag dem Leser überlassen bleiben, diese nachzuvollziehen. Ausgangspunkt ist die Energie im stationären Zustand:

$$\begin{aligned}
 E_{\min}(\vartheta) &= \frac{J^2}{2[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta), \\
 \implies E'_{\min}(\vartheta) &= -\frac{J^2}{[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]^2} \\
 &\quad \times \{I_1 \sin \vartheta \cos \vartheta - I_3(\cos \vartheta - \epsilon) \sin \vartheta\} + mga \sin \vartheta, \\
 \implies E'_{\min}(\vartheta) &= 0 \iff \sin \vartheta = 0 \\
 &\quad \vee \quad J^2(I_1 \cos \vartheta - I_3(\cos \vartheta - \epsilon)) = mga[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]^2, \\
 E''_{\min}(\vartheta) &= \frac{4J^2 \sin^2 \vartheta}{[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]^3} \{I_1 \cos \vartheta - I_3(\cos \vartheta - \epsilon)\}^2 \\
 &\quad - \frac{J^2}{[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]^2} \\
 &\quad \times \{I_1(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + I_3(\sin^2 \vartheta - (\cos \vartheta - \epsilon) \cos \vartheta)\} \\
 &\quad + mga \cos \vartheta, \\
 E''_{\min}(0) &= -\frac{J^2}{[I_3(1 - \epsilon)^2]^2} \{I_1 - I_3(1 - \epsilon)\} + mga.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt: $\vartheta = 0$ ist immer lokales Minimum (stabil) für $I_1 \leq I_3(1 - \epsilon)$ (unabhängig von J); oder aber im Falle $I_1 > I_3(1 - \epsilon)$ für

$$J^2 < \frac{mgaI_3^2(1 - \epsilon)^4}{I_1 - I_3(1 - \epsilon)}. \quad (2.8)$$

Für $\vartheta = \pi$ ergibt sich

$$E''_{\min}(\pi) = -\frac{J^2}{[I_3(1 + \epsilon)^2]^2} \{I_1 - I_3(1 + \epsilon)\} - mga.$$

Hieraus lesen wir ab, daß Stabilität nur für $I_1 < I_3(1 + \epsilon)$ möglich ist. Es muß dann zusätzlich

$$J^2 > \frac{mgaI_3^2(1 + \epsilon)^4}{I_3(1 + \epsilon) - I_1} \quad (2.9)$$

gelten.

Bemerkung

Die letzten beiden Ungleichungen lassen sich auch mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeiten bezüglich Drehungen um die Figurenachse schreiben. Führt man die Kardanschen Winkel α, β, γ als generalisierte Koordinaten ein (Definition siehe etwa [15]), so gilt für $\vartheta = 0$: $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} + \dot{\psi}$ und für $\vartheta = \pi$: $\dot{\gamma} = -\dot{\varphi} + \dot{\psi}$. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit bei $\vartheta = 0$ mit $\dot{\gamma}_A$ sowie bei $\vartheta = \pi$ mit $\dot{\gamma}_E$ und setzen für ϵ wieder a/r ein, so folgt aus (2.8) als Stabilitätskriterium

$$\dot{\gamma}_A^2 \frac{r}{r-a} \left[\frac{I_3}{I_1} - \frac{r}{r-a} \right] > \frac{mga}{I_1}. \quad (2.10)$$

Für $\vartheta = \pi$ ergibt sich aus (2.9)

$$\dot{\gamma}_E^2 \frac{r}{r+a} \left[\frac{I_3}{I_1} - \frac{r}{r+a} \right] > \frac{mga}{I_1}. \quad (2.11)$$

Dies sind genau die Kriterien, die Kurt Magnus [15] mit der „Methode der kleinen Schwingungen“ (lineare Stabilitätsanalyse) hergeleitet hat. Allerdings mit dem bedeutenden Unterschied, daß aufgrund unserer Ableitung die obigen Bedingungen jetzt notwendig *und* hinreichend für die Stabilität sind!

Des weiteren wurde bei der Herleitung lediglich ein Gleitreibungsgesetz mit der Eigenschaft $F_R = 0 \iff v_R = 0$ vorausgesetzt, die genaue Form (Bei K. Magnus gilt $F_R = cv_R$) ist dagegen unbedeutend! Dies erklärt auch die Unabhängigkeit von irgendeinem Reibungsfaktor.

2.4 Existenz von Zwischenzuständen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Zwischenzustände genauer, und leiten Kriterien für deren Existenz und Verträglichkeit mit dem Vorliegen eines Stehaufkreisels her. Die Analyse geschieht wieder mit Hilfe der Kurvendiskussion von $E_{\min}(\vartheta)$.

Der erste Term in (2.4) beschreibt die Rotationsenergie und ist üblicherweise sehr viel größer als die potentielle Energie. Deshalb wird zunächst der Schwerkraftterm vernachlässigt. Nullsetzen der ersten Ableitung von $E_{\min}(\vartheta)$ führt für $\sin \vartheta \neq 0$ auf die Beziehung

$$\cos \vartheta = \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I_1}. \quad (2.12)$$

Mit $-1 < \cos \vartheta < 1$ folgt hieraus

$$I_1 < I_3(1 - \epsilon) \quad \text{für } I_3 > I_1, \quad (2.13)$$

$$I_1 > I_3(1 + \epsilon) \quad \text{für } I_3 < I_1. \quad (2.14)$$

Werten wir die zweite Ableitung von $E_{\min}(\vartheta)$ für $\vartheta_C := \arccos[\epsilon I_3/(I_3 - I_1)]$ aus, so ergibt sich

$$E''_{\min}(\vartheta_C) = \frac{J^2}{[I_1 \sin^2 \vartheta_C + I_3(\cos \vartheta_C - \epsilon)^2]^2} (I_1 - I_3) \sin^2 \vartheta_C.$$

Eine ausführliche Stabilitätsanalyse unter Berücksichtigung des Schwerkraftterms benötigt auch die Kenntnis der kritischen Werte $\dot{\varphi}_C$ sowie $\dot{\psi}_C$; dies erfordert einige zusätzliche Überlegungen und ist im Anhang B ausgeführt.

Somit existiert ein stabiler Zustand nur für $I_1 > I_3$ was wegen (2.14) $I_1 > I_3(1 + \epsilon)$ nach sich zieht; wegen $\cos \vartheta_C < 0$ befindet sich hierbei bemerkenswerterweise der Schwerpunkt oberhalb des Mittelpunktes. Im Fall $I_1 < I_3$ ergibt sich dann ganz analog $I_1 < I_3(1 - \epsilon)$. Aufgrund der Instabilität führt die Bewegung dann zwangsläufig zu den Zuständen mit $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Ob das System nun in $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ hineinläuft, hängt von den Startwerten, genauer von den entsprechenden Attraktionsbereichen ab. Beide Fixpunkte sind in diesem Fall stabil, wie die Analyse im vorhergehenden Abschnitt gezeigt hat.

Auf die Frage, was sich bei Berücksichtigung des Schwerkraftterms für Änderungen ergeben, insbesondere was nun „ J hinreichend groß“ quantitativ bedeutet wird im folgenden eingegangen.

Betrachten wir also wie soeben die Zwischenzustände, gekennzeichnet durch $\sin \vartheta \neq 0$. Nullsetzen der ersten Ableitung von $E_{\min}(\vartheta)$ führt auf die Gleichung

$$J^2(I_1 \cos \vartheta - I_3(\cos \vartheta - \epsilon)) = mga[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3(\cos \vartheta - \epsilon)^2]^2. \quad (2.15)$$

Natürlich muß wieder $-1 < \cos \vartheta < 1$ gelten. Dies impliziert dann

$$I_1 - I_3(1 - \epsilon) < \frac{mgaI_3^2(1 - \epsilon)^4}{J^2} \quad \text{für } I_3 > I_1, \quad (2.16)$$

$$I_3(1 + \epsilon) - I_1 < \frac{mgaI_3^2(1 + \epsilon)^4}{J^2} \quad \text{für } I_3 < I_1. \quad (2.17)$$

Die Kleinerzeichen folgen aus (2.13) bzw. (2.14), da diese Ungleichungen im Grenzfall $g \rightarrow 0$ (bzw. $J^2 \rightarrow \infty$) erfüllt sein müssen.

Vergleichen wir (2.8) sowie (2.9) mit den obigen Ungleichungen, so erkennen wir, daß sich die Existenz von Zwischenzuständen und die Existenz eines Stehaufkreisels (hier als inhomogene Kugel betrachtet) gegenseitig ausschließen! Also kann ein Stehaufkreisel nur dann vorliegen, wenn sich die Ungleichheitszeichen umdrehen, also wenn

$$J^2[I_1 - I_3(1 - \epsilon)] > mgaI_3^2(1 - \epsilon)^4 \quad (2.18)$$

$$J^2[I_3(1 + \epsilon) - I_1] > mgaI_3^2(1 + \epsilon)^4 \quad (2.19)$$

gilt.

Wegen ihrer Bedeutung fassen wir die letzten Bedingungen für das Vorliegen eines Stehaufkreisels in Form einer inhomogenen Kugel noch einmal zusammen:

Notwendige Bedingung:

$$I_3(1 - \epsilon) < I_1 < I_3(1 + \epsilon) \quad (2.20)$$

Hinreichende Bedingung:

$$J^2 > \text{Max} \left\{ \frac{mgaI_3^2(1 - \epsilon)^4}{I_1 - I_3(1 - \epsilon)}, \frac{mgaI_3^2(1 + \epsilon)^4}{I_3(1 + \epsilon) - I_1} \right\} \quad (2.21)$$

Die erste Schranke in (2.21) entspricht der Instabilität bei $\vartheta = 0$ und die zweite Schranke ist äquivalent zur Stabilität bei $\vartheta = \pi$, wie uns die Stabilitätsanalyse gezeigt hat.

Kapitel 3

Der Stehaufkreisel mit Stift

Der gesamte Bewegungsablauf des Kreisels vom Anwerfen bis zum Zurücktaumeln in die Ruhelage läßt sich in vier Phasen aufteilen:

- I Nur die Hauptkugel berührt den Boden
- II Der Kreisel hat keinen Bodenkontakt (Flugphase)
- III Doppelkontakt von Stifthalbkugel und Hauptkugel
- IV Lediglich der Stift berührt den Boden

Die Phase I wurde bisher behandelt und auch Phase IV wirft keine neuen Probleme auf, da hier lediglich r durch r' sowie a durch a' zu ersetzen sind. Unsere Erhaltungsgröße G (respektive J) geht hierbei in das neue G' (J') über.

Flugphasen treten nach unseren numerischen Berechnungen sehr häufig auf und machen sich auch im Experiment akustisch bemerkbar. Wenn sich der Kreisel in der Luft befindet erhalten wir die Bewegungsgleichungen leicht, indem wir in (1.24) bis (1.29) die Reibungsterme gleich Null setzen. Zusätzlich verschwindet in den Lagrangegleichungen für ϑ und die Schwerpunktkoordinate z_s noch der Verformungsterm.

In diesem Kapitel betrachten wir den „echten“ Stehaufkreisel mit Stift und untersuchen die Doppelkontaktphase (Hauptkugel und Stifthalbkugel berühren gleichzeitig den Boden) genauer. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen geschieht ganz analog wie in Abschnitt 1.3. Wir erhalten eine geringfügig modifizierte Lagrangefunktion, es kommt lediglich ein Term, welcher die Verformung von Stift und Boden beschreibt hinzu. Die Dissipationsfunktion spaltet sich jetzt in zwei Anteile mit unterschiedlichen Auflagekräften und Relativgeschwindigkeiten auf. Deshalb ist statt mg_{eff} nun die jeweilige Normalkraft einzusetzen. Dies ergibt somit für die Doppelkontaktphase (Phase III) die Dissipationsfunktion

$$P = P_1 + P_2,$$

mit

$$P_1 = f \frac{\sqrt{r}}{mD} (r - z_s - a \cos \vartheta)^{3/2} \omega_z \left(\frac{3}{16} \pi R + \frac{R}{p} \ln \cosh \left(\frac{p \nu_{R_1}}{\omega_z R} \right) \right),$$

$$P_2 = f \frac{\sqrt{r'}}{mD} (r' - z_s - a' \cos \vartheta)^{3/2} \omega_z \left(\frac{3}{16} \pi R' + \frac{R'}{p} \ln \cosh \left(\frac{p \nu_{R_2}}{\omega_z R'} \right) \right).$$

Auch die Auflösung nach den (Winkel-) Beschleunigungen geschieht wie in Abschnitt 1.5 beschrieben. Wir erhalten somit

$$\ddot{x}_s = -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \dot{x}_s}, \quad (3.1)$$

$$\ddot{y}_s = -\frac{1}{m} \frac{\partial P}{\partial \dot{y}_s}, \quad (3.2)$$

$$\ddot{z}_s = -g + \frac{\sqrt{r}}{Dm} (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2} + \frac{\sqrt{r'}}{Dm} (r' - a' \cos \vartheta - z_s)^{3/2}, \quad (3.3)$$

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \left(1 - \frac{I_3}{I_1} \right) - \frac{1}{I_1} \left\{ I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta + (r - a \cos \vartheta - z_s)^{3/2} \frac{\sqrt{r}}{D} a \sin \vartheta \right. \quad (3.4)$$

$$\left. + (r' - a' \cos \vartheta - z_s)^{3/2} \frac{\sqrt{r'}}{D} a' \sin \vartheta + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}} \right\}, \quad (3.5)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{I_1 \sin \vartheta} \left\{ (I_3 - 2I_1) \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta + I_3 \dot{\psi} \dot{\vartheta} + \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} \cos \vartheta - \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}} \right\}, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta - \ddot{\varphi} \cos \vartheta - \frac{1}{I_3} \frac{\partial P}{\partial \dot{\psi}}. \quad (3.7)$$

Leider gibt es in dieser Phase keine Erhaltungsgröße, auf die man sich stützen könnte und wir sind deshalb verstärkt auf die numerischen Resultate angewiesen.

Um Aussagen über ein eventuelles Aufrichten auf den Stift und Erreichen der stabilen Endposition $\vartheta = \pi$ zu ermöglichen, ist es erforderlich das Verhältnis von der Erhaltungsgröße G vor und der Erhaltungsgröße G' nach dem Doppelkontakt zu kennen. Hierzu zunächst eine wichtige Feststellung: Angenommen die Aufrichtung würde instantan ohne jegliche Reibungsverluste erfolgen, so würde in sehr guter Näherung $G = G'$ gelten! Aus den nachfolgenden Überlegungen folgt auch die annähernde Gleichheit von G und G' am Anfang des Doppelkontaktes, was durch die Numerik glänzend bestätigt wird.

Zum Beweis ziehen wir die im Anhang abgeleiteten Formeln für $\dot{\varphi}(\vartheta)$ und $\dot{\psi}(\vartheta)$ heran:

$$\dot{\varphi} \approx \frac{G}{I_1(r - a \cos \vartheta)}, \quad \dot{\psi} \approx \frac{G \cos \vartheta}{r - a \cos \vartheta} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right).$$

Die Größe G' ergibt sich analog wie G zu

$$G' = I_1 r' \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (r' \cos \vartheta - a') (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}).$$

Mit obigem $\dot{\varphi}(\vartheta)$ und $\dot{\psi}(\vartheta)$ erhält man nach kurzer Rechnung

$$G' = \frac{G(r' - a' \cos \vartheta)}{r - a \cos \vartheta} = G.$$

Setzen wir harten Boden voraus, so gilt für den Schwerpunkt während Phase III die Zwangsbedingung $z_s = r - a \cos \vartheta = r' - a' \cos \vartheta$ und hieraus folgt die Behauptung.

Dies wäre eine sehr angenehme Eigenschaft, denn wir könnten mit unseren bisherigen Ergebnissen unter leichten Modifikationen entscheiden, ob eine Aufrichtung zustande kommt oder nicht. Das Ziel ist es also, das Verhältnis G_A/G'_E zu bestimmen (die Indizes beziehen sich auf Anfang und Ende von Phase III).

Die Änderung von G und G' hängt von der Zeitspanne τ des Doppelkontaktes ab und diese war bei allen unseren Testläufen mit Aufrichtung außerordentlich kurz ($\tau \simeq 10^{-3}$ s). Es läßt sich leicht analytisch zeigen, daß in diesem Fall die maximale relative Änderung von G und G' nur einige Prozent beträgt, diese Größen also praktisch konstant bleiben, was auch durch die Numerik gezeigt wird.

Leider ist es trotz sehr intensiver Bemühungen nicht gelungen auf analytischem Wege τ zu ermitteln, da bei Kombination mehrerer Näherungsformeln der Gesamtfehler außer Kontrolle gerät, bzw. einige Abschätzungen einfach zu ungenau werden. Wir sind deshalb auf die numerische Evidenz angewiesen. Aus der Tatsache der näherungsweise Konstanz von G und G' während dem Doppelkontakt ergeben sich zwei sehr bedeutsame Konsequenzen:

1. Folgerung

Die Aufrichtung auf den Stift läßt sich erklären! Die Bewegung verläuft nach Voraussetzung so, daß der Neigungswinkel im Mittel zunimmt, in Phase III bleibt jedoch ϑ konstant, d. h.

$$\cos \vartheta_G = \frac{r - r'}{a - a'}. \quad (3.8)$$

Deshalb muß der Druck auf den Auflagepunkt A' zunehmen, hieraus folgt dann die Aufrichtung.

2. Folgerung

Aus den Anfangsbedingungen $G(t = 0)$ läßt sich bereits eine Aussage machen, ob der Kreisel in der vertikalen Position auf dem Stift landen kann oder nicht. Mit der Gleichung (2.9) erhält man für die Stabilität des invertierten Kreisels auf dem Stift die hinreichende Bedingung

$$G'_E{}^2 > \frac{mga'I_3^2(1+\epsilon)^4r'^2}{I_3(1+\epsilon) - I_1}. \quad (3.9)$$

Aus Energiebetrachtungen folgt ganz allgemein, daß G'_E entweder ziemlich genau die selbe Größe wie G_A besitzt, oder darunter liegt. Dies bedeutet, wenn wir in (3.9) G'_E durch G_A ersetzen erhalten wir eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines „echten“ Stehaufkreisels.

Mit den Ergebnissen für eine inhomogene Kugel sind wir nun in der Lage, das Verhalten eines Stehaufkreisels mit Stift in Abhängigkeit von Parametern und Startwerten zusammenfassend zu beschreiben. (Im folgenden werden die Indizes weggelassen, also $G = G_A$, $G' = G'_E$).

Die Bedingungen

$$\begin{aligned} I_3(1-\epsilon) &< I_1, \\ G^2 &> \frac{mgaI_3^2(1-\epsilon)^4r^2}{I_1 - I_3(1-\epsilon)} \end{aligned}$$

sind notwendig und hinreichend für die Instabilität bei $\vartheta = 0$. Ab hier ist eine Fallunterscheidung notwendig:

1. Fall: $I_1 < I_3(1 + \epsilon)$

Es gibt keine Zwischenzustände. Der Kreisel kann in der stabilen Position $\vartheta = \pi$ auf dem Stift landen, wenn die notwendige Bedingung

$$G^2 > \frac{mga'I_3^2(1+\epsilon')^4r'^2}{I_3(1+\epsilon') - I_1} \quad (3.10)$$

erfüllt ist.

2. Fall: $I_1 \geq I_3(1 + \epsilon)$

Es gibt einen stabilen Zwischenzustand oberhalb von $\vartheta = \pi/2$. Um zu verhindern, daß der Kreisel auf dem Weg zur invertierten Position „hängenbleibt“, muß die Aufrichtung auf den Stift *vor* dem kritischen Winkel ϑ_C erfolgen, also

$$\vartheta_G < \vartheta_C.$$

Ein ausgezeichneter Näherungswert für ϑ_C wird im Anhang abgeleitet. Die Bedingung (3.10) muß natürlich ebenfalls erfüllt sein.

Kapitel 4

Diskussion der numerischen Ergebnisse

Bevor wir zur Diskussion der numerischen Berechnungen kommen, noch einige Vorbemerkungen zu unseren Kreiselparametern. Wir haben sowohl reale Stehaufkreisel vermessen, als auch Literaturdaten verwendet. In allen Fällen wurden unsere analytischen Ergebnisse durch die Numerik bestätigt.

Allerdings zeigte sich bei fast allen Testläufen, daß der Kreisel insbesondere nach dem Doppelkontakt sehr zahlreiche kurze Luftsprünge ausführt und sich nur langsam wieder „beruhigt“. Dies ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß unser Modell keinerlei Dämpfung in z -Richtung enthält und die Verformung nach dem Aufschlagen vollkommen elastisch erfolgt. Diesem Umstand läßt sich abhelfen, indem man die Elastizitätsmoduln verkleinert. Deshalb haben wir E-Moduln verwendet, welche etwa zwei Zehnerpotenzen unter „realen“ Werten liegen.

Eine Entdimensionierung der Bewegungsgleichungen wäre wünschenswert, allerdings ist leider nicht ersichtlich, was die geeigneten Skalierungsgrößen sind. Ferner würde sich vermutlich auch der Übergang auf den Stift problematisch gestalten. Aus diesem Grunde und um den Vergleich mit dem Experiment zu erleichtern, haben wir die Differentialgleichungen in ihrer jetzigen Form belassen und versucht „typische“ Anfangsbedingungen und Kreiselabmessungen zu verwenden.

Für unser erstes Beispiel wurden die Parameter

$$\begin{aligned} r &= 1.5 \cdot 10^{-2} \text{m}, & a &= 0.3 \cdot 10^{-2} \text{m}, & r' &= 0.5 \cdot 10^{-2} \text{m}, \\ a' &= 1.6 \cdot 10^{-2} \text{m}, & f &= 0.3, & m &= 6 \cdot 10^{-3} \text{kg}, \\ I_1 &= 9 \cdot 10^{-7} \text{kgm}^2, & I_3 &= 7 \cdot 10^{-7} \text{kgm}^2, & E = E' &= 1 \cdot 10^7 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \\ \sigma &= \sigma' = 0.1, & p &= 0.8, \end{aligned}$$

sowie die Startwerte

$$\dot{\psi}_0 = 180 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \vartheta_0 = 0.1 \text{ rad}, \quad z_{s_0} = 1.1997782 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

ausgesucht. Die neun übrigen Startwerte sind null; die z -Koordinate des Schwerpunktes wurde so gewählt, daß sich der Kreisel im Kräftegleichgewicht von Verformung und Gewichtskraft befindet.

Demnach muß die Bewegung in einen stabilen Zwischenzustand mit fixem Neigungswinkel zwischen $\pi/2$ und π münden. Die kritischen Werte $\vartheta_C, \dot{\varphi}_C$ sowie $\dot{\psi}_C$ wurden nach den Gleichungen (B.7), (B.6) und (B.3) berechnet und sind gestrichelt eingezeichnet. Es ist klar, daß diese Grenzwerte strenggenommen nur für $t \rightarrow \infty$ erreicht werden, die Bewegung aber aufgrund unserer berücksichtigten Berührungsfläche vorher zum Stillstand kommt.

Dies zeigt sich sehr schön an der Abnahme von ϑ nach (approximativem) Erreichen des kritischen Wertes ϑ_C (Abbildung 4.1). Diese Abnahme erfolgt aber nicht monoton, da der gesamten Bewegung noch Schwingungen der Figurenachse (Nutationen) überlagert sind. Dieses Oszillieren überträgt sich insbesondere auch auf \dot{z}_s . Allgemein ist bei der Schwerpunktbewegung in Abbildung 4.2 zumindest andeutungsweise erkennbar, daß Schwingungen um die theoretisch ermittelten Werte erfolgen.

Bei den Graphen von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ fallen sofort die starken Schwankungen mit enormen Winkelbeschleunigungen am Anfang auf. Grund hierfür ist der sogenannte „Abstandseffekt“: Projizieren wir einen beliebigen Punkt der Figurenachse (etwa den Mittelpunkt M') sowie den Schwerpunkt S auf die x - y -Ebene und halten die Projektion P_S in Gedanken fest, so spiralt $P_{M'}$ um P_S herum. Für den Abstand ρ der Projektionen gilt $\rho = a' \sin \vartheta$. Um nun $P_{M'}$ von P_S zu verfolgen, muß die Winkelgeschwindigkeit $|\dot{\varphi}|$ umso größer sein, je kleiner der Neigungswinkel ϑ (und somit ρ) ist. Aufgrund der Nutationsbewegung führt dann jeder Peak von $\vartheta(t)$ zu einem mehr oder weniger starken Ausschlag von $\dot{\varphi}$ und über die Kopplung durch die (Quasi-) Erhaltungsgröße auch zu einem Peak von $\dot{\psi}$.

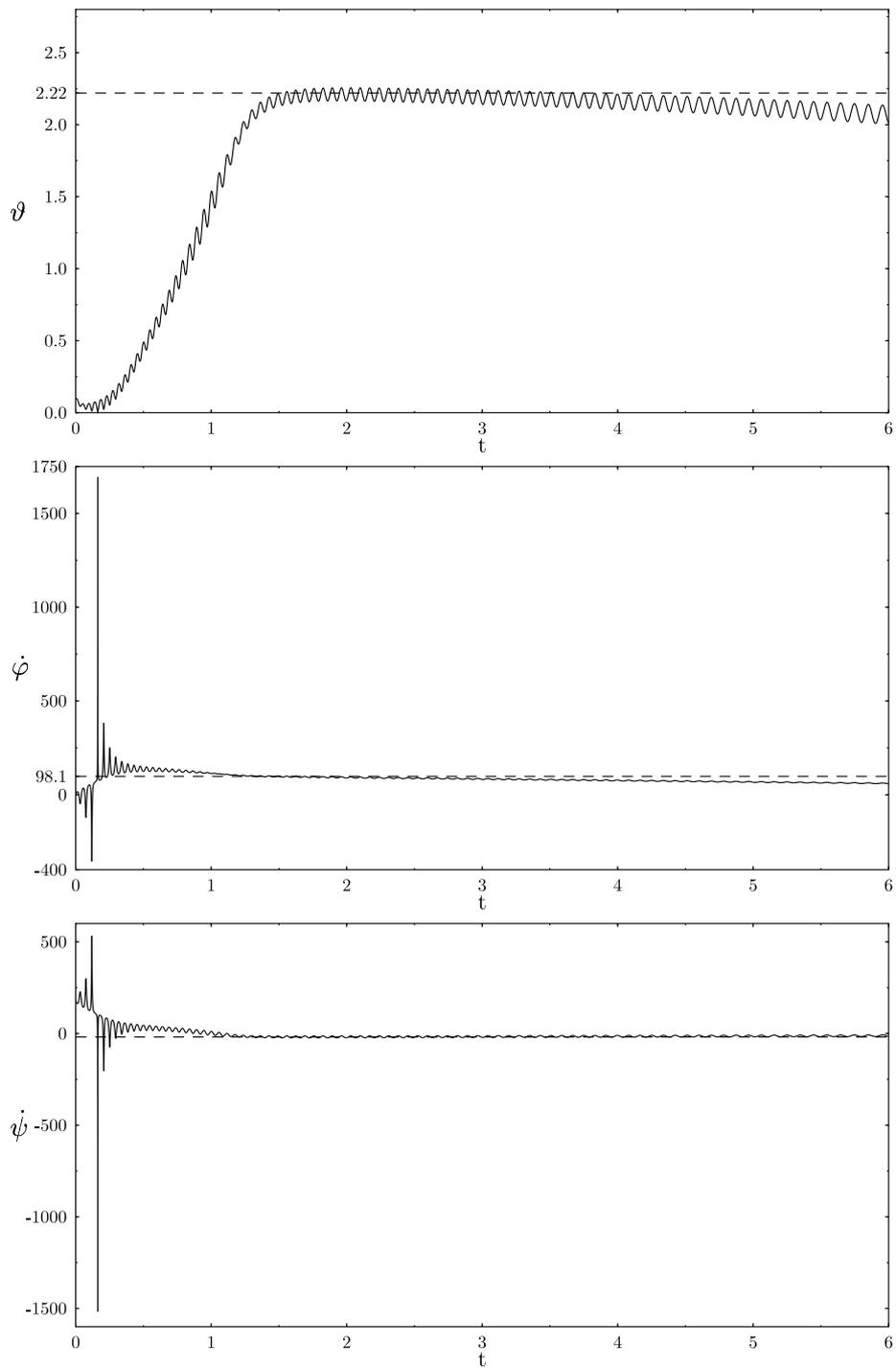


Abbildung 4.1: Zwischenzustand, Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel

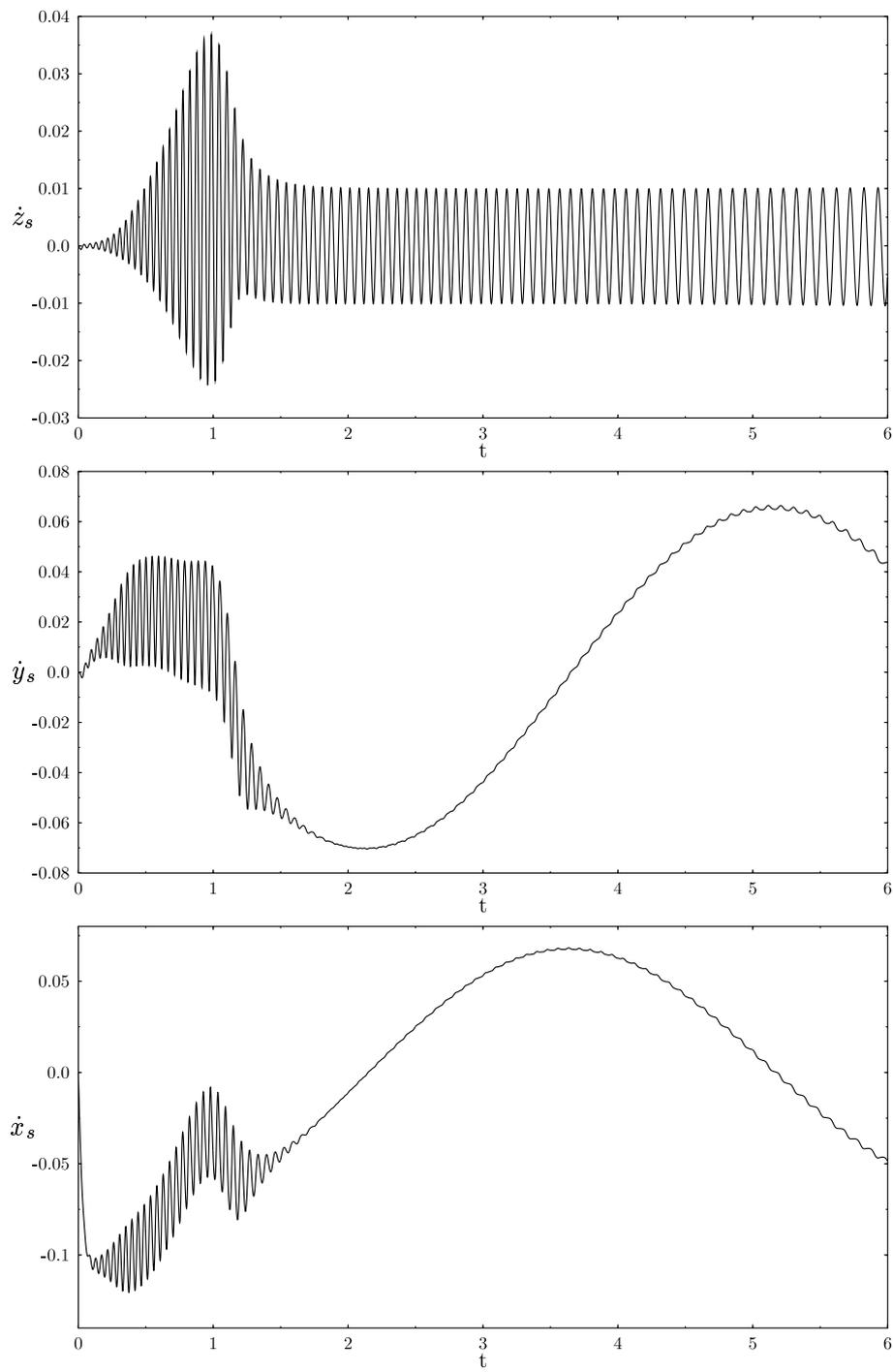


Abbildung 4.2: Zwischenzustand, Schwerpunktgeschwindigkeiten

Unser zweites Beispiel zeigt den eigentlichen Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit, den Stehaufkreisel mit Stift. Die Parameter und Anfangsbedingungen sind genau wie bei dem vorhergehenden Beispiel, mit einem Unterschied: $I_1 = 8 \cdot 10^{-7} \text{kgm}^2$. Diese kleine Änderung bewirkt, daß keine Zwischenzustände existieren und somit eine Aufrichtung auf den Stift erfolgen kann.

Am interessantesten ist die Darstellung des Neigungswinkels in Bild 4.3. Neben den Nutationsbewegungen ist sehr schön das Aufrichten auf den Stift innerhalb kürzester Zeit zu erkennen; hierbei erreicht der Kreisel zunächst beinahe eine senkrechte Position auf dem Stift. Dies äußert sich auch in den beiden Peaks bei $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$, welche aus dem bereits besprochenen „Abstandseffekt“ resultieren, bzw. formal aus den Gleichungen (1.38) und (1.39) (Singularität bei $\vartheta = \pi$) folgen.

Auch wenn sich $\vartheta(t)$ dem theoretisch ermittelten Wert π immer mehr anschmiegt, gibt es keine weiteren Peaks bei $\dot{\varphi}$ oder $\dot{\psi}$, da es sich (zunächst) um einen stabilen Zustand handelt, was zur Folge hat, daß der Ausdruck in der geschweiften Klammer in (3.6) schneller gegen Null gehen muß als $\sin \vartheta$.

Die heftigen Fluktuationen von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ in der Anfangsphase haben die bereits besprochene Ursache, allerdings ist leider nicht klar, was das „Umklappen“ der Ausschläge nach oben bzw. unten bewirkt. Bemerkenswert ist aber, daß dieser Wechsel mit dem „richtigen“ Beginn der Präzessionsbewegung einhergeht, wie aus der Darstellung der Eulerwinkel φ und ψ ersichtlich ist (Abbildung 4.4).

Bevor wir zur Diskussion der weiteren Systemgrößen kommen, betrachten wir noch einmal die Graphen von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ sowie der Energie um die Qualität unserer Näherungsformeln (in Abbildung 4.5 punktiert aufgetragen) aus dem Anhang A zu illustrieren.

Bei der Energie paßt unser Näherungsgraph während der gesamten Bewegung außerordentlich gut mit dem tatsächlichen Verlauf zusammen. Die Schwingungen bis zum Doppelkontakt sind auf den unterdrückten Nutationsterm $I_1 \dot{\vartheta}^2 / 2$ zurückzuführen. Nach dem Aufrichten auf den Stift verschwindet auch die Schwingung der Figurenachse und unsere Näherungsformel geht — wie bereits erwähnt — in den exakten Ausdruck für $E_{\min}(\vartheta)$ über. Bei den Graphen von $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ stimmen die (Mittel-) Werte naturgemäß für $\vartheta \approx \pi/2$ besonders gut mit den tatsächlichen Daten überein. Ab $\vartheta = 2.64$ (entspricht 151°) wurden die exakten Werte für die vertikale Position nach den Gleichungen (A.10) und (A.11) aufgetragen. Hieran läßt sich das Anschmiegen an die theoretischen Größen im Limes $\vartheta \rightarrow \pi$ verfolgen.

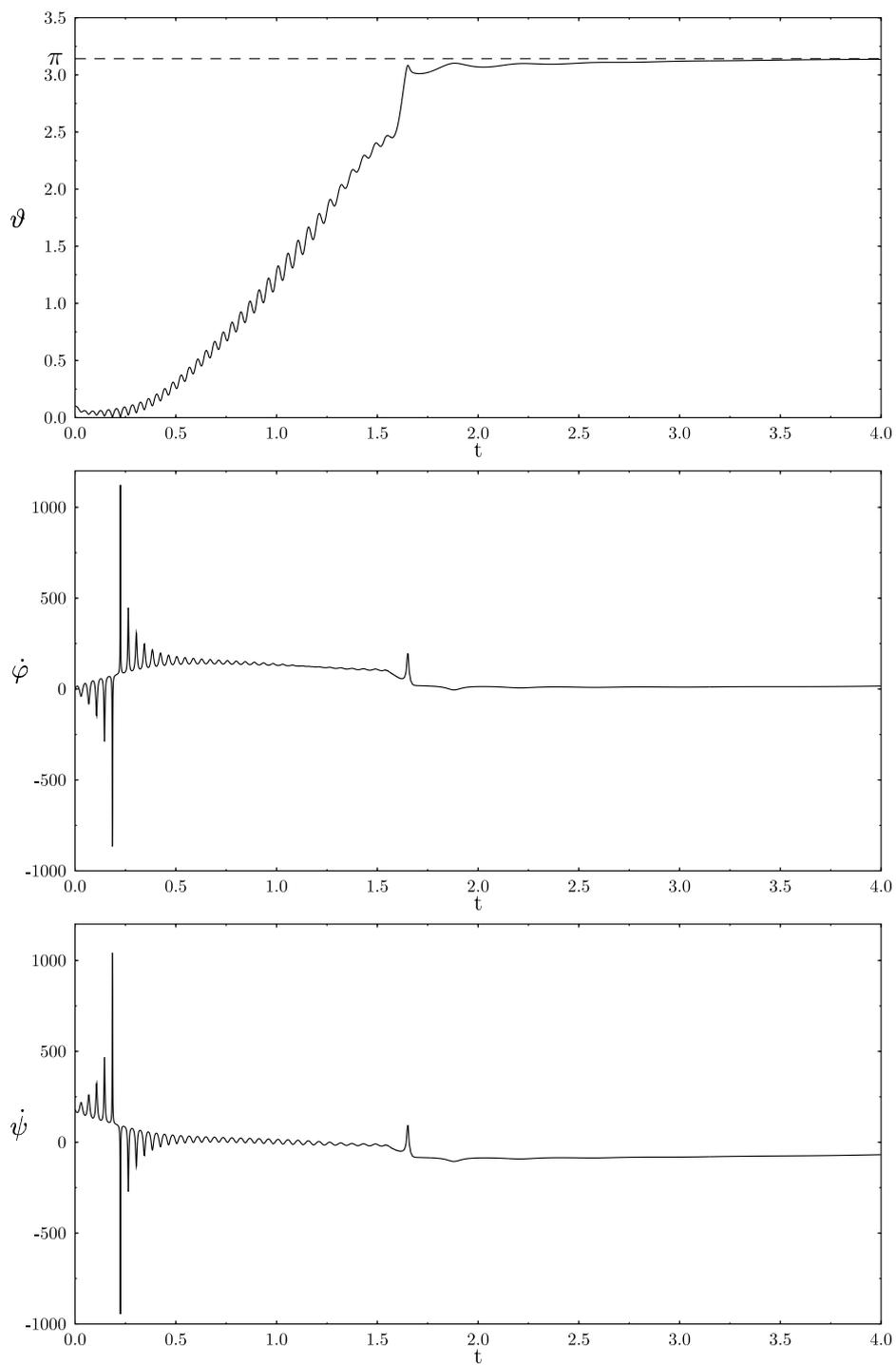


Abbildung 4.3: Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel

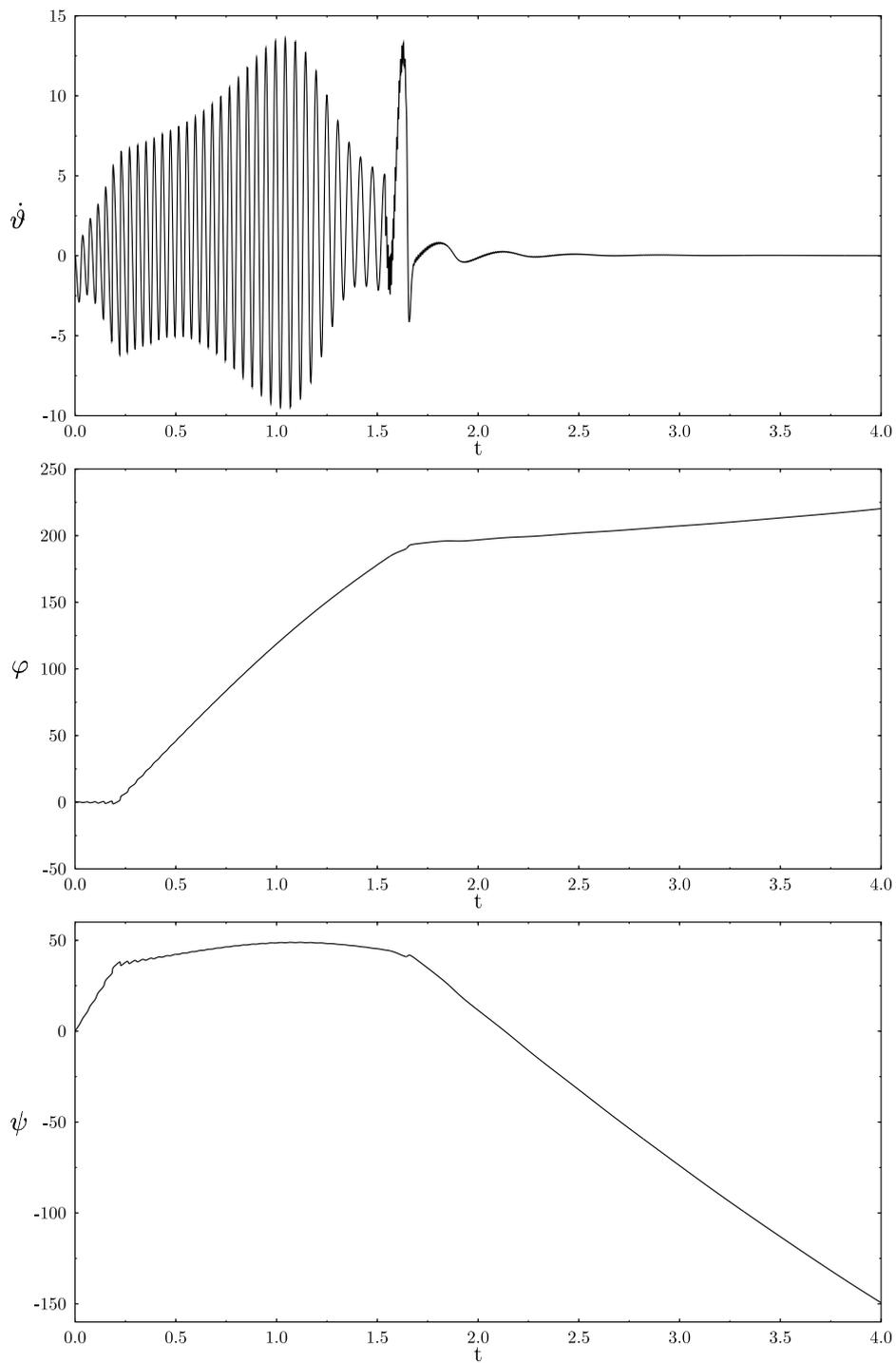


Abbildung 4.4: Eulerwinkel mit Nutationsgeschwindigkeit

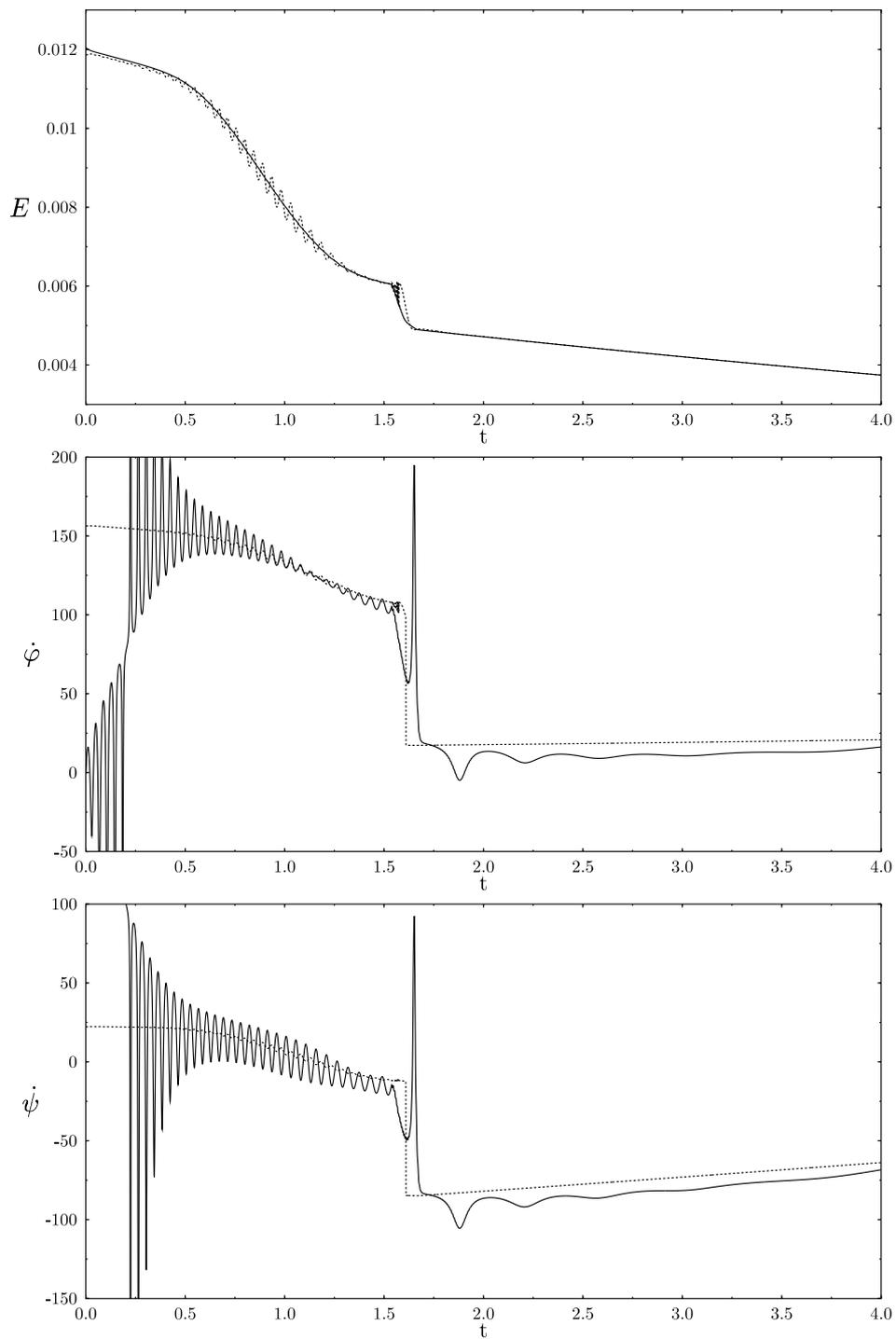


Abbildung 4.5: Vergleich der Näherungsformeln mit berechneten Werten

Aus den Graphen der Schwerpunktgeschwindigkeit (Abbildung 4.6) erkennen wir, daß die Translationsbewegung nur eine sehr untergeordnete Rolle spielt und nach dem Aufrichten auf den Stift auch sehr schnell zur Ruhe kommt. Diese gedämpfte Schwingung um die Ruhelage erfolgt auch im ersten Beispiel, wie Langzeit-Testläufe zeigen, ist aber bei der dortigen Zeitskala nur andeutungsweise zu erkennen.

Wesentlich interessanter ist das zeitliche Verhalten unserer Systemgrößen G und G' aus Bild 4.7. Wie in Kapitel 3 vorhergesagt, stimmen diese zu Beginn der Doppelkontaktphase außerordentlich gut überein. Die abrupte Änderung von G erfolgt nicht während, sondern *nach* der Doppelkontaktphase; dies gilt auch für die Winkelgeschwindigkeiten, wie der „gezoomte“ Verlauf zeigt!

Aufgrund von Bohrreibung nimmt G' in der vertikalen Position monoton ab, bis schließlich Instabilität beim kritischen Wert, welcher gestrichelt eingezeichnet ist, eintritt.

Da beim Stehaufkreisel in erster Linie das Aufrichten auf den Stift und Erreichen der Position $\vartheta = \pi$ interessiert, verzichten wir hier auf eine Darstellung des gesamten Bewegungsablaufs und teilen lediglich das Ergebnis mit: Unmittelbar nach 4 s neigt sich der Kreisel immer stärker zur Seite bis schließlich ein Übergang in Phase III mit sehr langer Verweildauer (>1 s) eintritt. Danach taumelt der Kreisel langsam in die Ruhelage zurück.

Sehr aufschlußreich ist auch das Verhältnis $pv_R/\omega_z R$, welches den Reibungstyp bestimmt. Hierzu folgende Erläuterung: Nach dem Doppelkontakt wurde $pv'_R/\omega_z R'$ aufgetragen, während Phase III das Minimum von $pv_R/\omega_z R$ und $pv'_R/\omega_z R'$. Beide Größen wurden auf einen Maximalwert beschränkt, was speziell beim Abheben vom Boden (R bzw. $R' \rightarrow 0$) erforderlich wird.

Aus dem Funktionsverlauf können wir insbesondere ablesen, daß nur für sehr kleine ϑ viskose Reibung vorliegt, danach dominiert bis zum Beginn des Doppelkontaktes eindeutig Coulomb-Reibung.

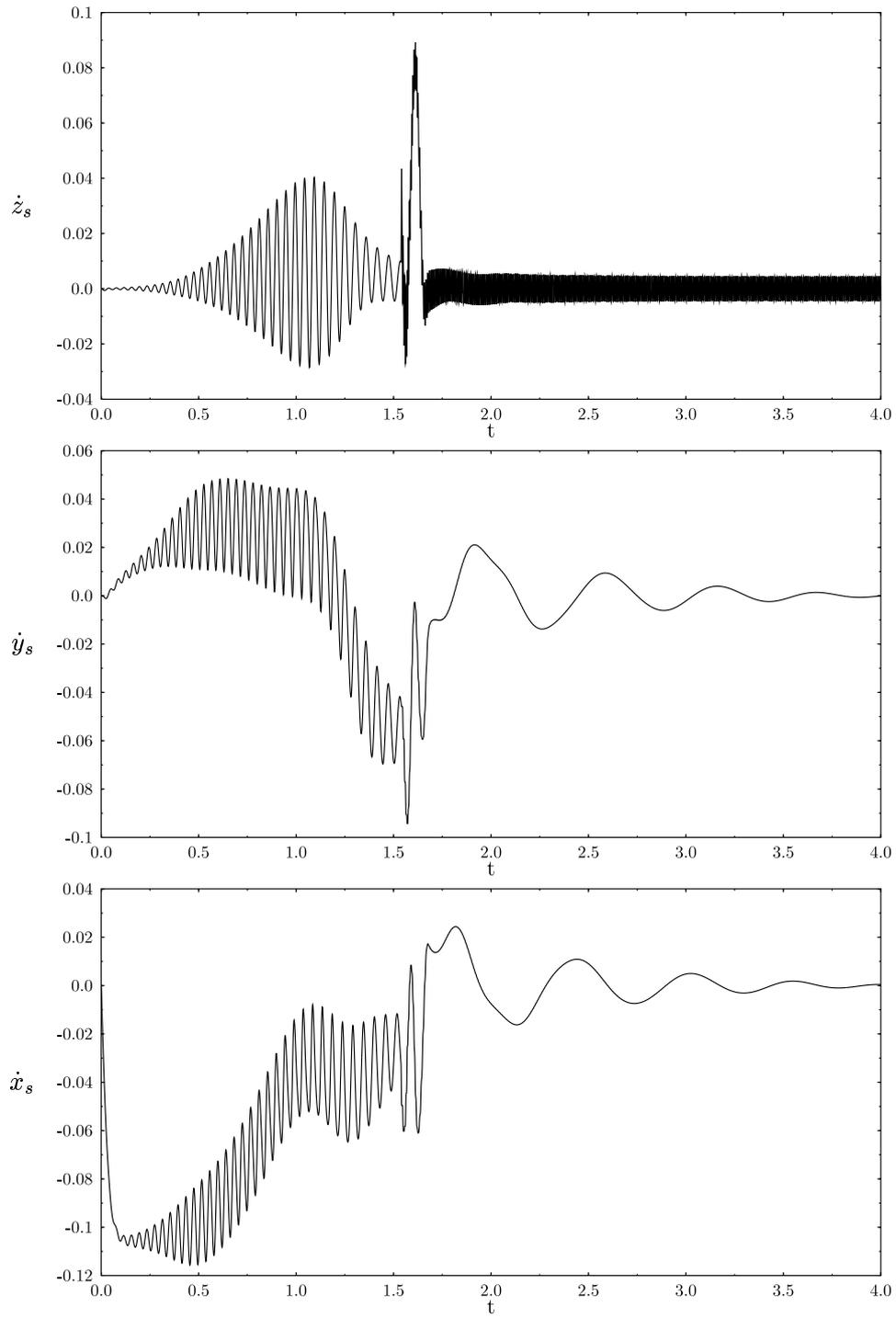


Abbildung 4.6: Schwerpunktgeschwindigkeiten

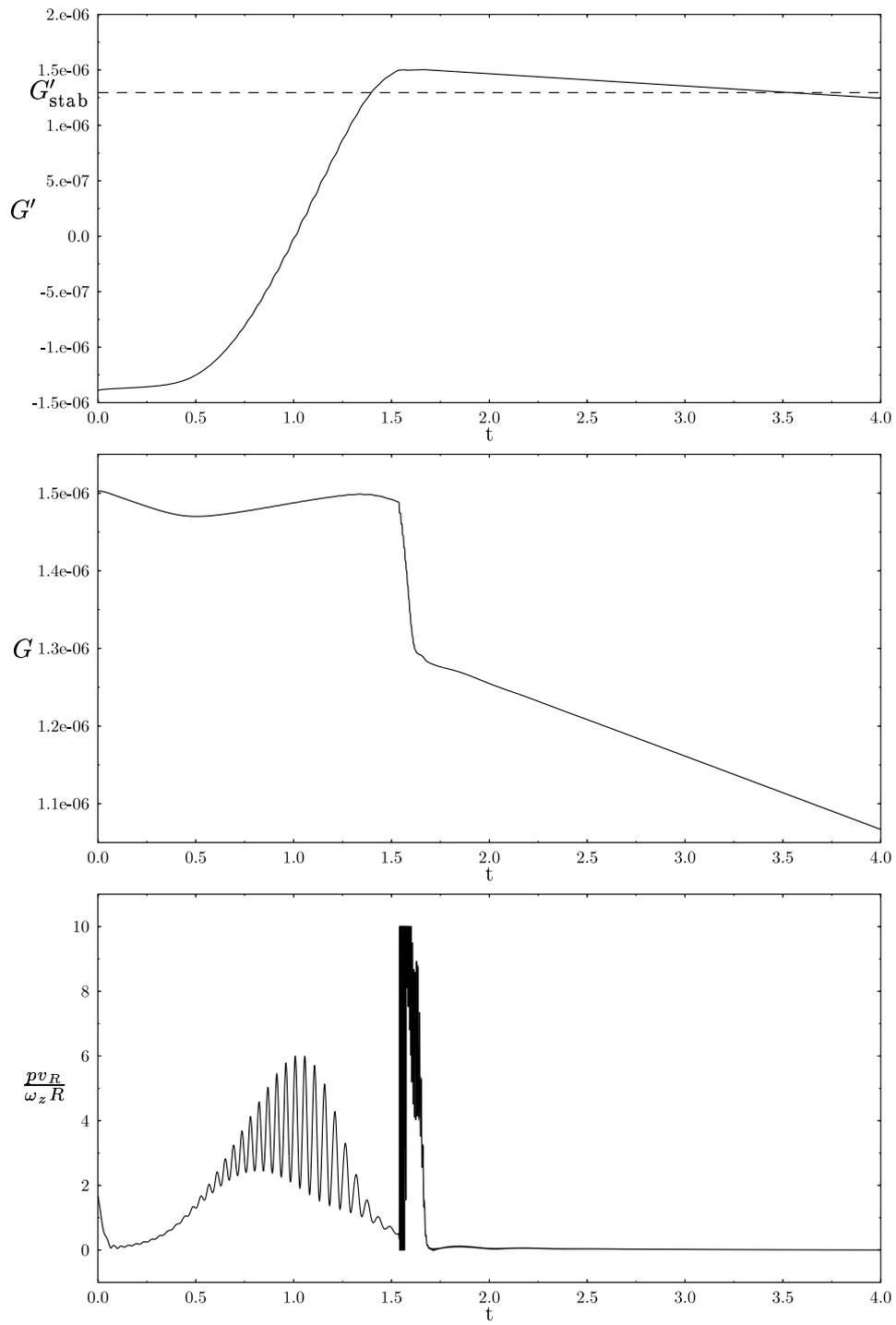


Abbildung 4.7: Quasierhaltungsgrößen und Reibungstyp

Die nachfolgenden Graphen 4.8 bis 4.10 beschreiben das Verhalten von zusammengesetzten Größen (Drehimpulse, Winkelgeschwindigkeiten) und spiegeln das bisher besprochene wider, sollen aber der Vollständigkeit halber noch kurz diskutiert werden.

Unsere Darstellung der Winkelgeschwindigkeit im Inertialsystem (Abbildung 4.8) zeigt, daß die z -Komponente während der gesamten Bewegung klar dominiert, also die momentane Drehachse im wesentlichen durch eine zur z -Achse parallele Gerade bestimmt wird. Dies äußert sich auch in den raumfesten Komponenten des Drehimpulses, welche naturgemäß ein ähnliches Verhalten wie die entsprechenden Komponenten der Winkelgeschwindigkeiten aufweisen.

Die Übereinstimmung der Funktionsverläufe von L_z und der Energie fällt sofort ins Auge und läßt sich auch analytisch begründen. Die Drehimpulskomponente L_z ist identisch mit p_φ und ist gegeben durch

$$L_z = p_\varphi = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}) \cos \vartheta.$$

Setzen wir unsere Näherungswerte $\dot{\varphi}(\vartheta)$ und $\dot{\psi}(\vartheta)$ ein, so ergibt sich

$$L_z \approx \frac{J}{1 - \epsilon \cos \vartheta}.$$

Vergleichen wir dies mit der Energiedarstellung (A.8), so erhalten wir mit $I_1 \approx I_3 =: I$ die Beziehung

$$E \approx \frac{J^2}{2I(1 - \epsilon \cos \vartheta)^2} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta) = \frac{L_z^2}{2I} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta),$$

womit alles gezeigt ist.

Bei der Winkelgeschwindigkeit im *körperfesten* Bezugssystem (siehe Abbildung 4.10) dominiert die ω_3 -Komponente nur am Anfang und nach dem Aufrichten auf den Stift, da hierbei die Figurenachse nahezu parallel zur z -Achse steht. Nach etwa 1.2 s (entspricht $\vartheta \approx \pi/2$) hat ω_3 einen Nulldurchgang, was auch analytisch aus (1.14) im Einklang mit unseren Näherungsformeln für $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ folgt. In diesem Bereich verteilt sich dann die Rotationsenergie auf die beiden übrigen Hauptträgheitsachsen.

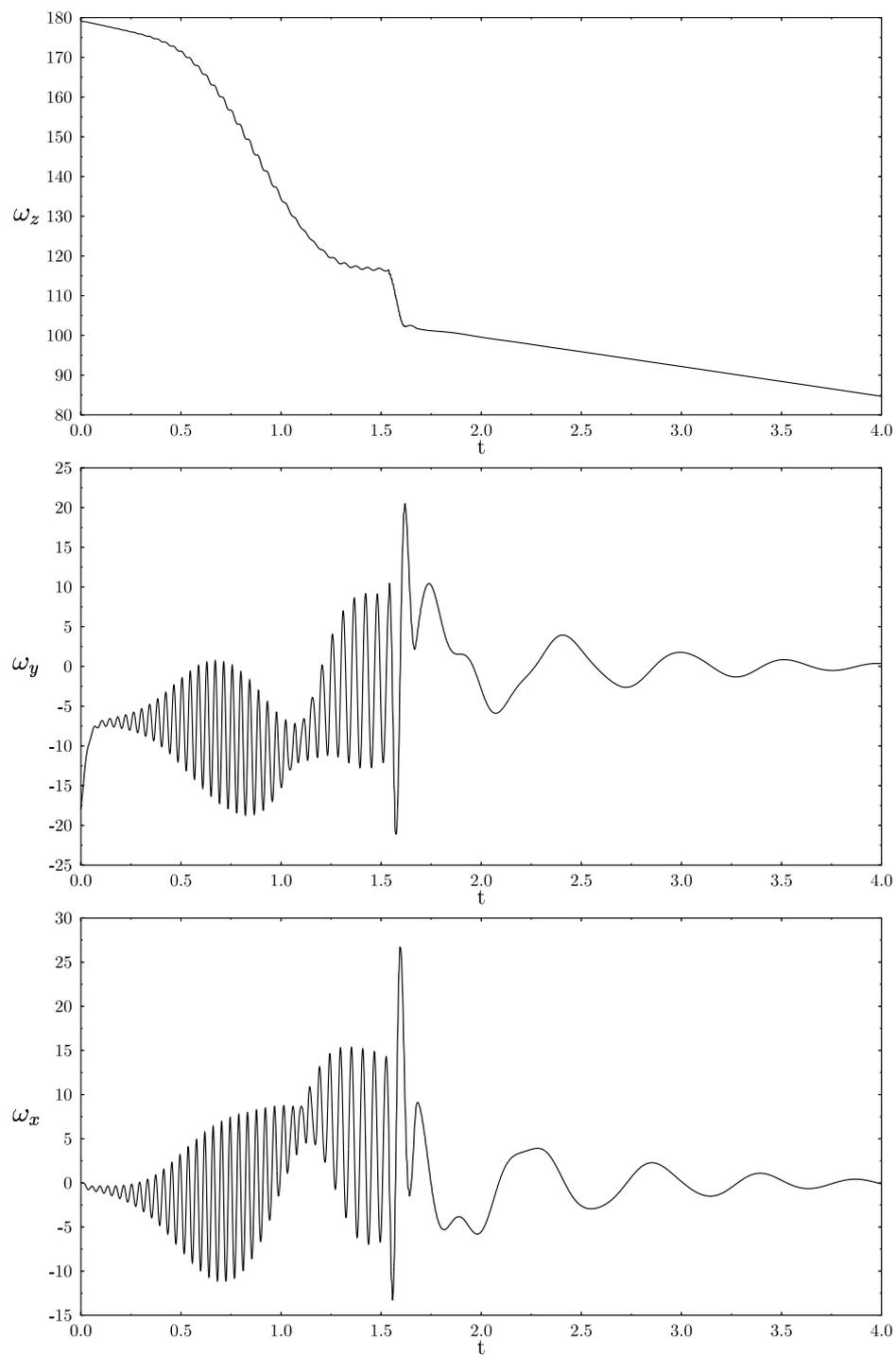


Abbildung 4.8: Raumfeste Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

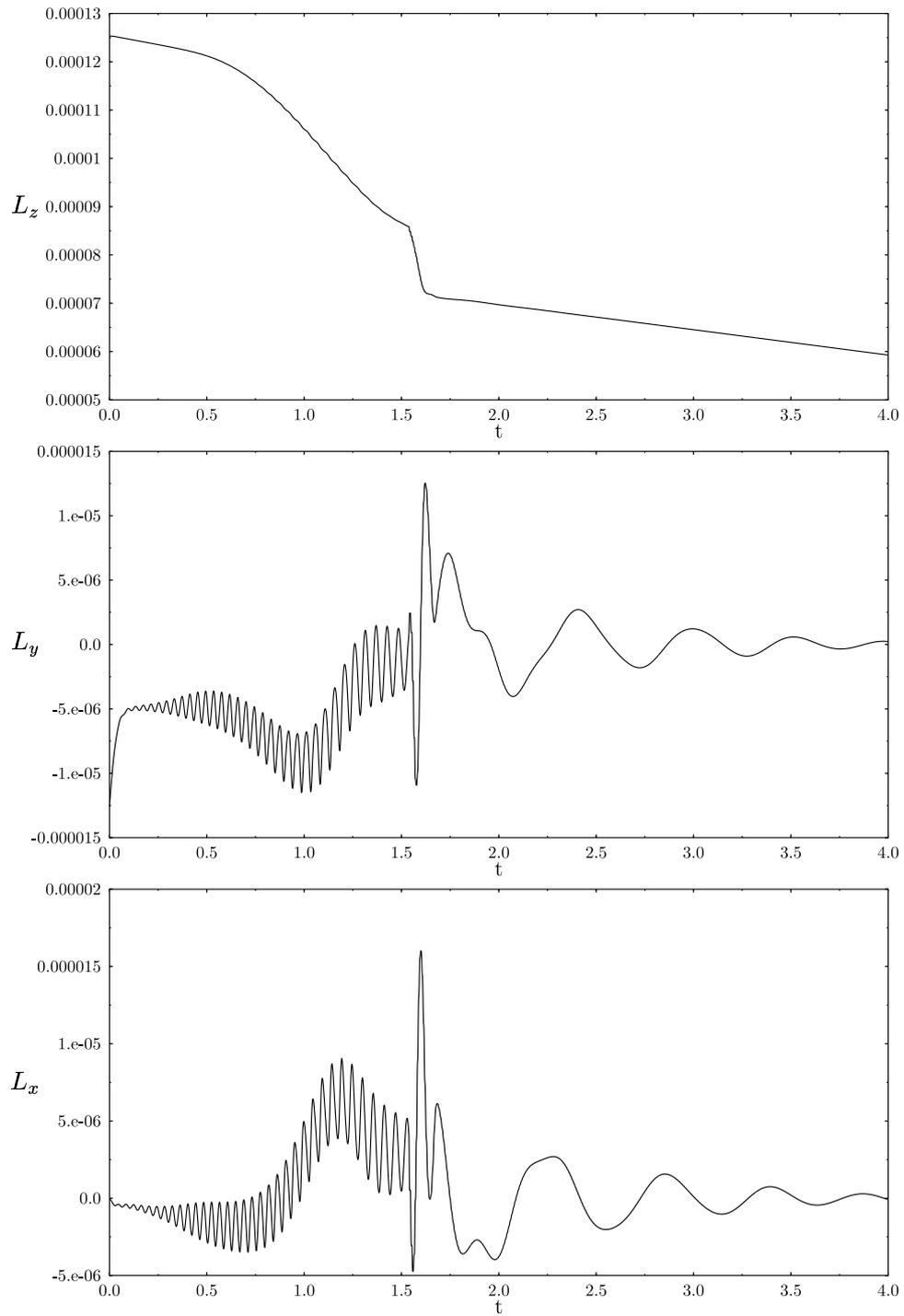


Abbildung 4.9: Raumfeste Drehimpulscomponenten (Eigendrehimpuls)

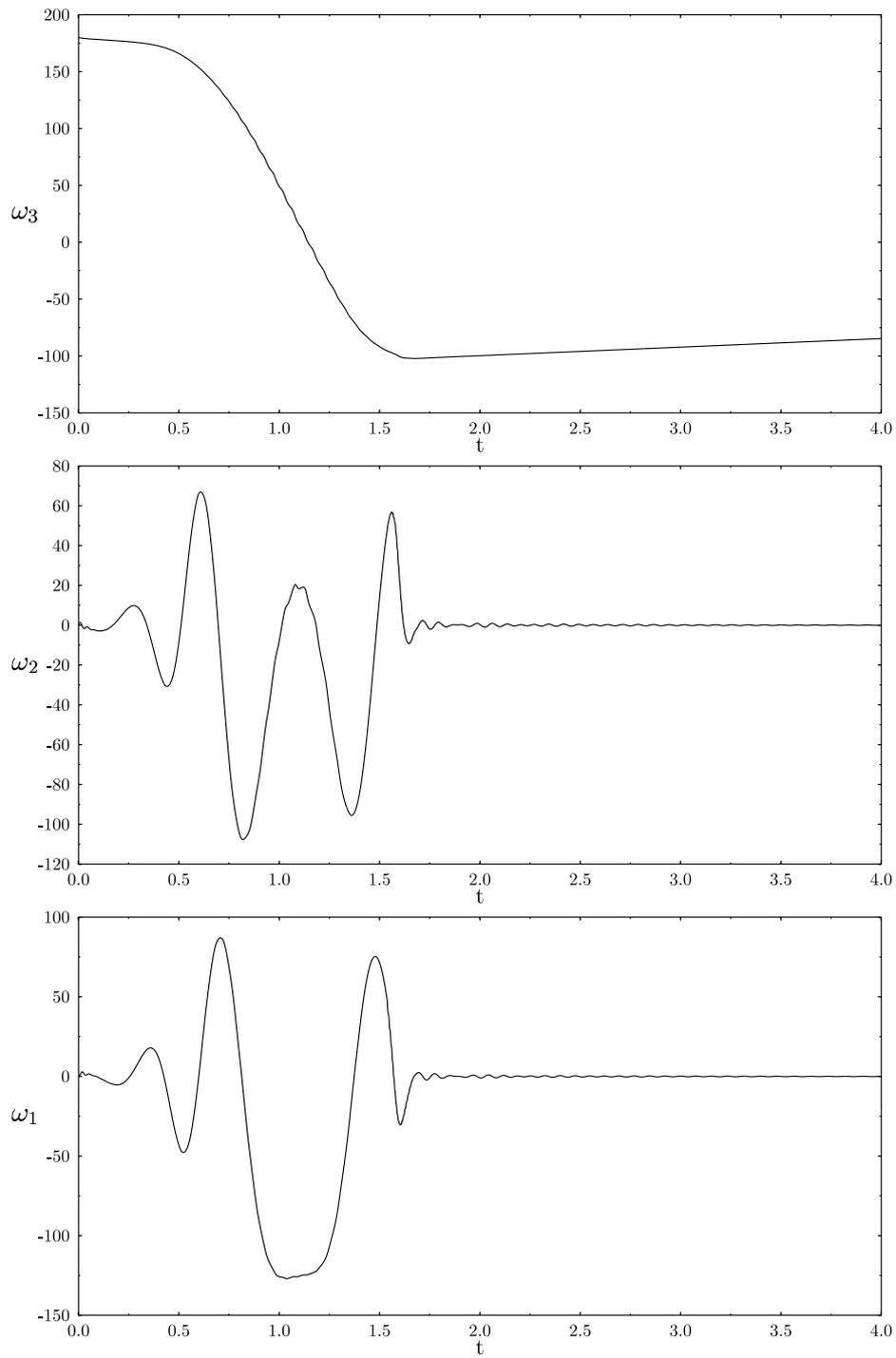


Abbildung 4.10: Körperfeste Komponenten der Winkelgeschwindigkeit

Abschließend nehmen wir die Umgebung des Doppelkontaktes noch genauer unter die Lupe (Abbildung 4.11). Besonders interessant ist hierbei das Phasendiagramm; die Bedeutung der einzelnen diskreten Zustände wurde bereits in Kapitel 3 erläutert.

Aus dem Graph entnehmen wir, daß die Verweildauer in Phase III im Bereich von 10^{-3} s liegt; dies war bei allen Testläufen mit Aufrichtung eine charakteristische Größe. Danach schließen sich vier kurze Luftsprünge abnehmender Länge an. Vor dem Doppelkontakt gab es kein Abheben, deshalb wurde das Phasendiagramm in der ungezoomten Fassung nicht mit aufgenommen. Bemerkenswert ist ferner das zweifache Zurücktaumeln in Phase III, bevor eine endgültige Aufrichtung erfolgt. Hierbei handelt es sich allerdings nur um ein sehr leichtes Berühren, wie aus dem Verhältnis der Auflagekräfte ersichtlich ist. (Dieses Verhältnis wurde der Übersichtlichkeit halber außerhalb von Phase III gleich null gesetzt).

Aus der Darstellung von $G(t)$ sowie $G'(t)$ (gestrichelt eingezeichnet) ist ersichtlich, daß während der Gewichtsverlagerung keine gravierenden Änderungen eintreten, allerdings nimmt G nach dem Doppelkontakt stark ab, im Gegensatz zu G' . Der treppenförmige Verlauf geht mit den Luftsprüngen einher, da in Flugphasen die Impulse p_φ sowie p_ψ Integrale der Bewegung sind.

Ähnliches gilt für die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ (Abbildung 4.12). Da dies die maßgeblichen Komponenten der Rotation sind, folgt hieraus, daß sich auch alle anderen Größen während Phase III nur leicht ändern, danach aber ein mehr oder weniger starker Abfall erfolgt. Dieses Verhalten ist auf den nunmehr großen Stifthebelarm zurückzuführen, welcher das Drehmoment der Reibung maßgeblich bestimmt.

Dies impliziert insbesondere auch starke Energiedissipation, was wiederum bedeutet, daß die Aufrichtung auf den Stift in Phase IV sehr schnell erfolgen muß, um die Konstanz von G' zu gewährleisten!

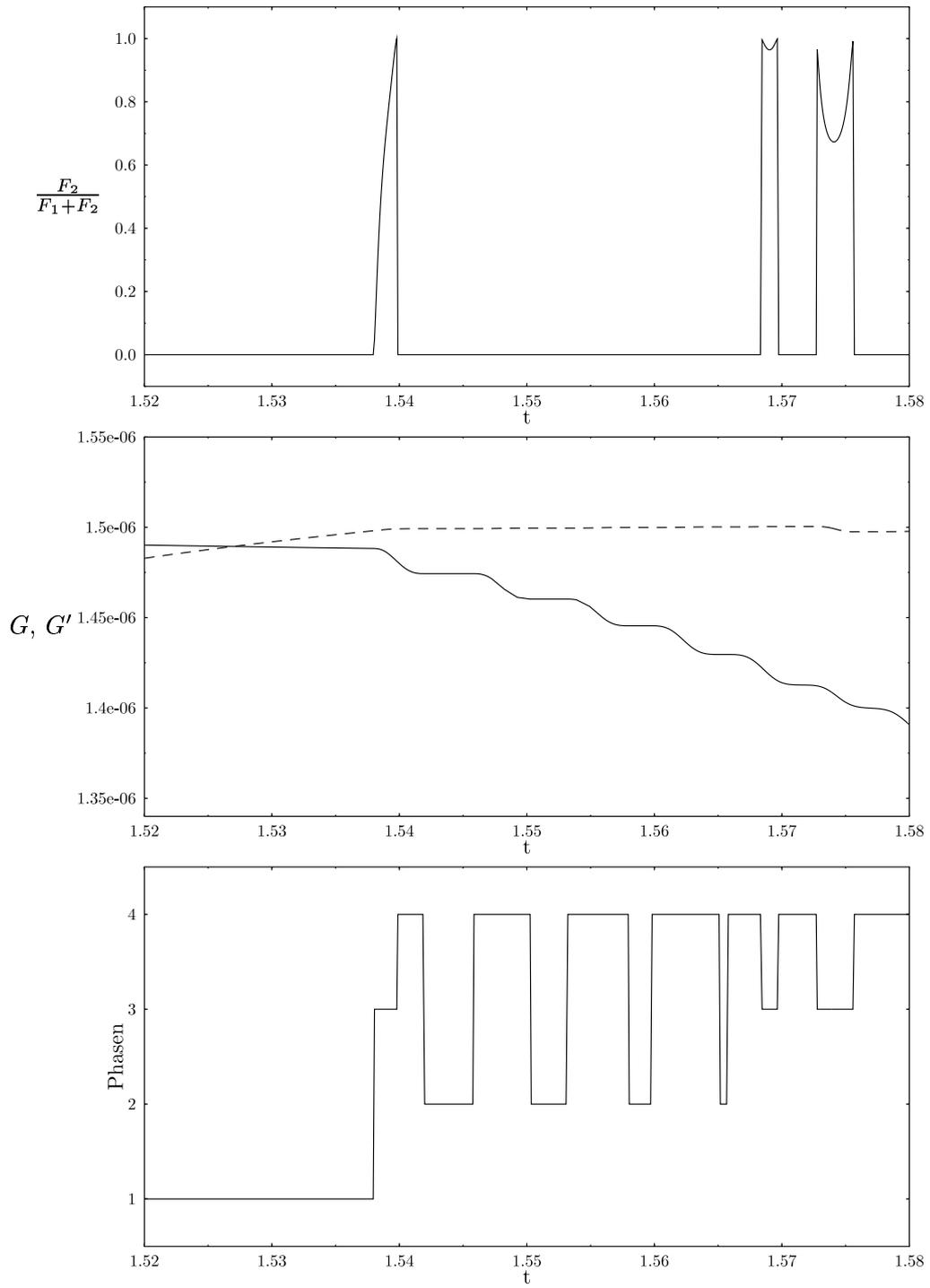


Abbildung 4.11: Gezoomte Darstellung mit Verhältnis der Auflagekräfte

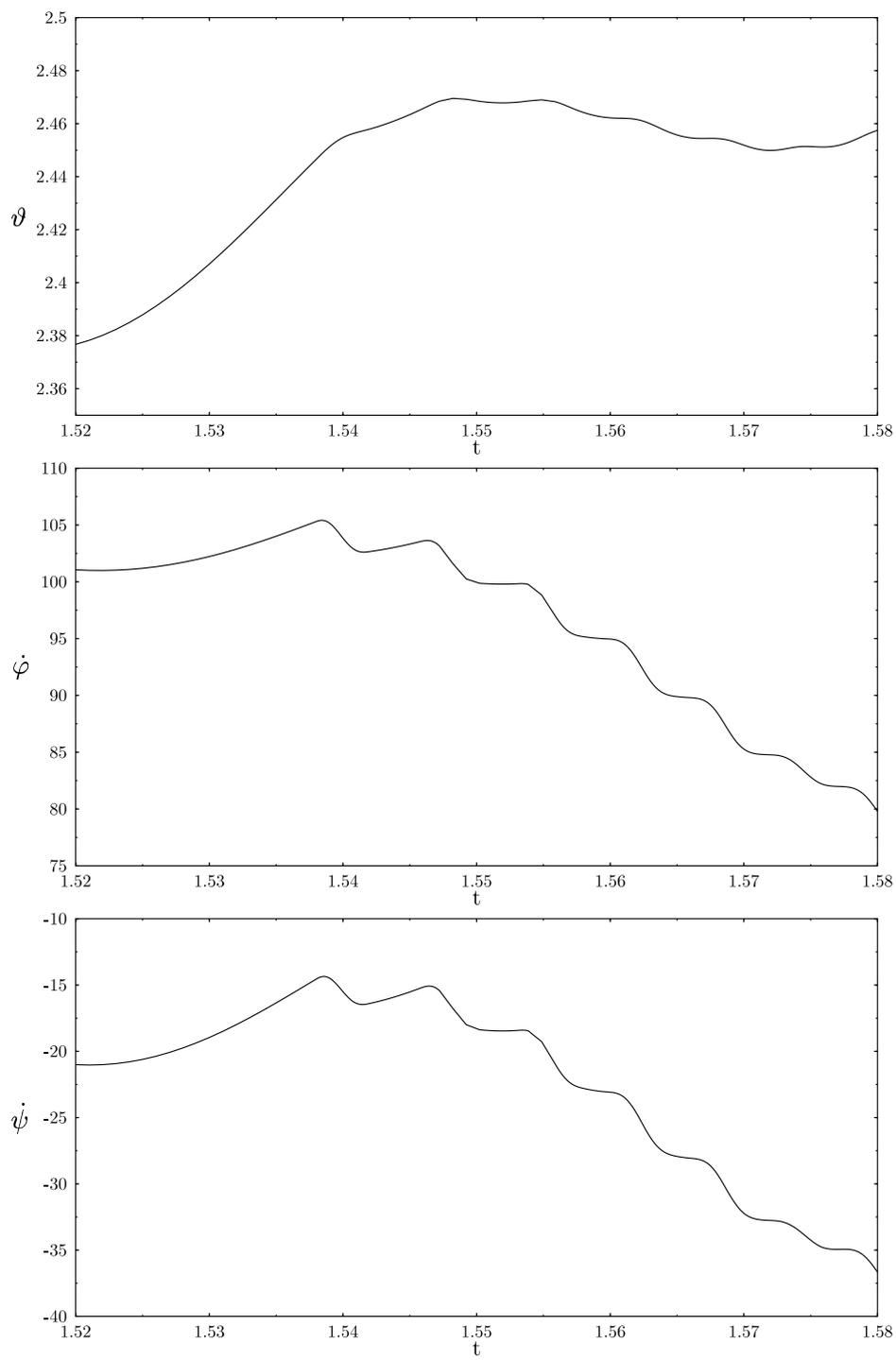


Abbildung 4.12: Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel gezoomt

Schlußbetrachtung

Zum Abschluß wollen wir unsere Ergebnisse noch einmal zusammenfassen. Wie wir gesehen haben, stellt die Gleitreibung eine entscheidende „Zutat“ für das Aufrichten auf den Stift dar.

Das eigentliche Geheimnis des Phänomens „Stehaufkreisel“ liegt jedoch in einer Erhaltungsgröße verborgen, was bei Vorhandensein von Reibung sehr verblüffend ist. Diese Erhaltungsgröße — die sich überdies hinaus unabhängig von der genauen Form des Reibungsgesetzes ergibt — zwingt den Kreisel bei geeigneten Parameter- und Startwerten in die invertierte Position auf den Stift!

Ferner wurde gezeigt, daß die Kombination von Reibung und Erhaltungsgröße die Bewegung unvermeidlich in einen Zustand minimaler Energie führt. Hieraus lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Stehaufkreisels ableiten, was über Stabilitätsuntersuchungen von gewissen Zuständen (insbesondere der vertikalen Position) geschieht.

Überdies hinaus wurde eine Modellerweiterung vorgenommen, welche die elastischen Eigenschaften von Kreisel und Unterlage berücksichtigt. Dies ermöglicht eine Simulation von Flugphasen und dem Aufschlagen auf den Boden und erlaubt somit eine realitätsgetreue Beschreibung der Bewegung. Auch wenn wir im Modell eine kleine Berührungsfläche berücksichtigen und dadurch das Integral der Bewegung nicht mehr ganz exakt erhalten ist, bleibt doch die Grundidee die gleiche: Die Bewegung strebt einem Zustand minimaler Energie zu, die mit dem momentanen Wert unserer jetzigen Quasi-Erhaltungsgröße verträglich ist. Dies liefert dann eine völlig analoge Erklärung für das seltsame Verhalten des Kreisels.

Sehr erfreulich ist ferner, daß die Numerik unsere analytischen Berechnungen vollauf bestätigt und auch die beobachtbaren Effekte zumindest qualitativ richtig wiedergibt, womit wir nun ein komplettes Modell vorliegen haben, welches den gesamten Bewegungsablauf eines Stehaufkreisels mit Stift realitätsnah beschreibt.

Anhang A

Näherungsweise Berechnung von $\dot{\varphi}(\vartheta)$ sowie $\dot{\psi}(\vartheta)$

Um $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ in Abhängigkeit vom Neigungswinkel ϑ zu ermitteln, brauchen wir neben unserer Erhaltungsgröße eine weitere Bestimmungsgleichung. Dies ist die Bewegungsgleichung für ϑ . Hierbei beschränken wir uns der Übersichtlichkeit halber auf den Fall dominierender Coulomb-Reibung, die Ergebnisse bleiben für unser Reibungsgesetz allerdings auch im allgemeinen Fall gültig. Die Lagrange-Gleichung für den Neigungswinkel ϑ lautet dann (vgl. Gl. (1.25))

$$0 = I_1 \ddot{\vartheta} + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (I_3 - I_1) + I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta \\ + F_N a \sin \vartheta + \frac{f F_N (r - a \cos \vartheta)}{v_R} \left[\dot{\vartheta} (r - a \cos \vartheta) - \dot{x}_s \sin \varphi + \dot{y}_s \cos \varphi \right]$$

hierbei ist F_N die Normalkraft, welche im Mittel durch mg gegeben ist.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer beschreibt die Geschwindigkeit in ϑ -Richtung (d. h. die Geschwindigkeit senkrecht zur Knotenlinie \overline{ON}) und ist deutlich kleiner als v_R , da diese im wesentlichen durch die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ bestimmt wird. Wir können deshalb den Reibungsterm gegenüber $F_N a \sin \vartheta$ vernachlässigen, sofern $\sin \vartheta$ nicht allzu klein wird.

Die Winkelbeschleunigung $\ddot{\vartheta}$ oszilliert aufgrund von Nutationsbewegungen recht stark, allerdings mit einem Mittelwert nur wenig von null verschieden und deshalb kann der Summand $I_1 \ddot{\vartheta}$ im Mittel ebenfalls gegenüber dem Schwerkraftterm vernachlässigt werden. Auch wenn der Term $I_1 \ddot{\vartheta}$ betragsmäßig die selbe Größenordnung wie $mg a \sin \vartheta$ erreicht, ist dies nicht weiter tragisch, wie die nachfolgende Herleitung (Betrachtung des Radikanden) zeigt. Dies ergibt dann für $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$ die zwei gesuchten Bestimmungsgleichungen

$$mga = \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta (I_1 - I_3) - I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \quad (\text{A.1})$$

$$J = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon) (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}). \quad (\text{A.2})$$

Durch Kombination erhalten wir für $\dot{\varphi}$ die Gleichung

$$\dot{\varphi} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - q} \quad (\text{A.3})$$

mit

$$b = -\frac{J}{I_1(1 - \epsilon \cos \vartheta)},$$

$$q = -\frac{mga(\cos \vartheta - \epsilon)}{I_1(1 - \epsilon \cos \vartheta)}.$$

Hierbei besitzen die Konstanten b und q dieselbe Größenordnung ($b \simeq 100$ rad/s).

In den Koeffizienten obiger Gleichung taucht das Trägheitsmoment I_3 bemerkenswerterweise nicht auf (wenn man von J absieht); dies ermöglicht es uns, das Vorzeichen der Wurzel zu bestimmen! Werden die Parameter so gewählt, daß ein stationärer Zwischenzustand existiert, so gilt nach der Herleitung zu Gleichung (2.4)

$$E = E_{\min} = J\dot{\varphi} + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta). \quad (\text{A.4})$$

Dies bedeutet, daß $\dot{\varphi}$ nicht ungefähr null sein kann, was wiederum zur Folge hat, daß in (A.3) das Vorzeichen der Wurzel mit dem Vorzeichen von J übereinstimmen muß. Die Numerik bestätigt ebenfalls eindeutig das Vorliegen schneller Präzession. Wir erhalten somit

$$\dot{\varphi} \approx \frac{J}{I_1(1 - \epsilon \cos \vartheta)} \quad (\text{A.5})$$

und hieraus wiederum

$$\dot{\psi} \approx \frac{J \cos \vartheta}{(1 - \epsilon \cos \vartheta)} \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right). \quad (\text{A.6})$$

Die letzte Gleichung zeigt uns insbesondere, daß $\dot{\psi}$ für $\vartheta \approx \pi/2$ Werte um null annimmt, was durch die numerischen Berechnungen hervorragend wiedergegeben wird!

Mit den vorhergehenden Gleichungen können wir auch die Gesamtenergie in Abhängigkeit vom Neigungswinkel ausdrücken. Unter Vernachlässigung der Translationsenergie, sowie Berücksichtigung von $\dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \gg \dot{\vartheta}^2$ erhalten wir

$$E \approx \frac{I_1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta + \frac{I_3}{2} (\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi})^2 + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta). \quad (\text{A.7})$$

Setzen wir unsere Winkelgeschwindigkeiten ein, ergibt sich

$$E \approx \frac{J^2}{2(1 - \epsilon \cos \vartheta)^2} \left(\frac{\sin^2 \vartheta}{I_1} + \frac{\cos^2 \vartheta}{I_3} \right) + mgr(1 - \epsilon \cos \vartheta). \quad (\text{A.8})$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich betont, daß die bisher abgeleiteten Beziehungen normalerweise für $\sin \vartheta \approx 0$ ihre Gültigkeit verlieren, da die eingehenden Näherungen nicht mehr erfüllt sind.

Falls das System jedoch in den stabilen Endzustand bei $\vartheta = \pi$ hineinläuft, gilt (A.8) exakt, wie ein Vergleich mit $E_{\min}(\vartheta)$ zeigt. Dies ist ein Glücksfall (aber natürlich kein Zufall) und zunächst umso verwunderlicher, als die Beziehungen (A.5) und (A.6) für $\vartheta = \pi$ nahezu völlig unbrauchbar werden! Des Rätsels Lösung liegt in der Struktur von J verborgen. Aus der Darstellung (A.2) entnehmen wir, daß unsere Erhaltungsgröße mit $I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta$ beginnt. Für $\sin \vartheta \approx 0$ fällt ein falscher Wert von $\dot{\varphi}$ nicht ins Gewicht, da die Approximationen $\dot{\varphi}(\vartheta)$ und $\dot{\psi}(\vartheta)$ die Bedingung (A.2) erfüllen und somit der Term $\dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}$ als Ganzes korrekt wiedergegeben wird auch wenn jeder Anteil für sich falsche Werte liefert! Wie aus Gleichung (A.7) ersichtlich, besitzt die Energie eine ganz ähnliche Struktur wie J . Deshalb führt die Darstellung (A.8) auch für kleine Werte von $\sin \vartheta$ zu guten Ergebnissen und geht für $\vartheta \rightarrow \pi$ in eine exakte Gleichung über.

Die asymptotischen Winkelgeschwindigkeiten lassen sich allerdings auch *exakt* berechnen, wenn man berücksichtigt, daß für $\vartheta \rightarrow \pi$ das Reibungsdrehmoment sowie die Nutationen verschwinden und die Drehachse mit der Figurenachse zusammenfällt. Die Präzessionsgeschwindigkeit ergibt sich dann zu (vgl. [16])

$$\omega_{\text{Prä}} = \dot{\varphi} = \frac{mgl}{I_3 \omega_z}, \quad (\text{A.9})$$

hierbei ist l der Abstand vom Auflagepunkt zum Schwerpunkt (Hebelarm).

Betrachten wir den Stehaufkreisel mit Stift, so gilt im asymptotischen Zustand $l = r' + a'$ und wir können die Präzessionsgeschwindigkeit in Abhängigkeit unserer Erhaltungsgröße J' durch

$$\dot{\varphi}(\vartheta = \pi) = \frac{mg(1 + \epsilon')^2 r'}{J'} \quad (\text{A.10})$$

ausdrücken. Über die Kopplung durch J' erhalten wir schließlich auch

$$\dot{\psi}(\vartheta = \pi) = -\frac{J'}{I_3(1 + \epsilon')} + \frac{mg(1 + \epsilon')^2 r'}{J'}. \quad (\text{A.11})$$

Anhang B

Klassifizierung von stationären Zwischenzuständen

In diesem Abschnitt sollen die stationären Zustände mit $\sin \vartheta \neq 0$ genauer untersucht werden. Ausgangspunkt ist das Gleichungssystem

$$0 = \dot{\varphi}^2 \cos \vartheta (I_3 - I_1) + I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + mga, \quad (\text{B.1})$$

$$J = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta + I_3 \dot{\varphi} (\cos \vartheta - \epsilon)^2, \quad (\text{B.2})$$

$$0 = \dot{\psi} + \epsilon \dot{\varphi}. \quad (\text{B.3})$$

Die erste Gleichung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für den Winkel ϑ , unter Berücksichtigung der Zwangsbedingung $z_s = r - a \cos \vartheta$ lautet diese

$$0 = (I_1 + ma^2 \sin^2 \vartheta) \ddot{\vartheta} + ma^2 \dot{\vartheta}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (I_3 - I_1) + I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \vartheta + mga \sin \vartheta + \frac{\partial P}{\partial \dot{\vartheta}}.$$

Im stationären Zustand verschwindet der Reibungsterm sowie die Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung von ϑ und wir erhalten nach Division mit $\sin \vartheta$ Gleichung (B.1). Die übrigen beiden Gleichungen folgen bereits aus der Herleitung im Haupttext.

Lösen wir etwa (B.2) nach $\dot{\varphi}$ auf und setzen dies in (B.1) ein, so folgt unter Berücksichtigung von (B.3) die bekannte Beziehung (2.15). Allerdings ist diese auf alternativem Wege gewonnene Gleichung vierten Grades in $\cos \vartheta$ recht unübersichtlich und es ist insbesondere nicht klar, wieviele reelle Lösungen sie bei beliebigem J besitzt. Deshalb führen wir unser Gleichungssystem in eine algebraische Gleichung für $\dot{\varphi}$ über, welche bedeutend angenehmer ist.

Aus (B.1) erhalten wir für den Neigungswinkel in Abhängigkeit von der Präzessionsgeschwindigkeit die Beziehung

$$\cos \vartheta = \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I_1} - \frac{mga}{\dot{\varphi}^2 (I_3 - I_1)}. \quad (\text{B.4})$$

Dies wird in (B.2) eingesetzt und führt nach kurzer Rechnung ebenfalls zu einer Gleichung vierten Grades in $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}^4 [I_1 I_3 (1 - \epsilon^2) - I_1^2] + J(I_1 - I_3) \dot{\varphi}^3 + (mga)^2 = 0. \quad (\text{B.5})$$

Für generische Parameter- und Startwerte können wir den Gravitationsterm vernachlässigen (siehe dazu auch Diskussion der numerischen Ergebnisse) und wir erhalten für das kritische $\dot{\varphi}_C$ den Wert

$$\dot{\varphi}_C = \frac{J(I_3 - I_1)}{I_1 I_3 (1 - \epsilon^2) - I_1^2}. \quad (\text{B.6})$$

Dies wird in (B.4) eingesetzt und liefert einen bereits sehr guten Näherungswert für den Neigungswinkel

$$\cos \vartheta_C = \frac{\epsilon I_3}{I_3 - I_1} - \frac{mga [I_1 I_3 (1 - \epsilon^2) - I_1^2]^2}{J^2 (I_3 - I_1)^3}. \quad (\text{B.7})$$

Nach diesen Vorarbeiten sind wir nunmehr in der Lage, die Stabilität eines Zwischenzustandes in voller Allgemeinheit zu untersuchen. Dies geschieht durch geeignete Verknüpfung der Beziehungen für $\dot{\varphi}$ und ϑ .

Wir hatten in unserer Stabilitätsanalyse gefunden:

$$\begin{aligned} E''_{\min}(\vartheta) &= \frac{4J^2}{[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon)^2]^3} \{ I_1 \sin \vartheta \cos \vartheta - I_3 (\cos \vartheta - \epsilon) \sin \vartheta \}^2 \\ &\quad - \frac{J^2}{[I_1 \sin^2 \vartheta + I_3 (\cos \vartheta - \epsilon)^2]^2} \\ &\quad \times \{ I_1 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + I_3 (\sin^2 \vartheta - (\cos \vartheta - \epsilon) \cos \vartheta) \} \\ &\quad + mga \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Aus (B.1) folgt

$$\frac{mga}{\dot{\varphi}^2} = \cos \vartheta (I_1 - I_3) + I_3 \epsilon, \quad (\text{B.8})$$

und mit Hilfe von Gleichung (B.2) erhalten wir

$$\begin{aligned} E''_{\min}(\vartheta_C) &= \frac{4 \sin^2 \vartheta_C (mga)^2}{J \dot{\varphi}_C} \\ &\quad - \dot{\varphi}_C^2 \{ I_1 (\cos^2 \vartheta_C - \sin^2 \vartheta_C) + I_3 (\sin^2 \vartheta_C - (\cos \vartheta_C - \epsilon) \cos \vartheta_C) \} \\ &\quad + mga \cos \vartheta_C. \end{aligned}$$

Wir betrachten den zweiten Term

$$\begin{aligned}
 -\dot{\varphi}_C^2 \{ \dots \} &= 2\dot{\varphi}_C^2 \cos^2 \vartheta_C (I_3 - I_1) \\
 &\quad - \dot{\varphi}_C^2 (I_3 - I_1) - \dot{\varphi}_C^2 I_3 \epsilon \cos \vartheta_C.
 \end{aligned}$$

Aus Gleichung (B.1) ergibt sich ferner

$$\dot{\varphi}_C^2 \cos^2 \vartheta_C (I_3 - I_1) - \dot{\varphi}_C^2 I_3 \epsilon \cos \vartheta_C + mga \cos \vartheta_C = 0, \quad (\text{B.9})$$

dies wird in den Ausdruck für E''_{\min} eingesetzt mit dem Ergebnis

$$E''_{\min}(\vartheta_C) = \frac{4 \sin^2 \vartheta_C (mga)^2}{J\dot{\varphi}_C} - \dot{\varphi}_C^2 \sin^2 \vartheta_C (I_3 - I_1). \quad (\text{B.10})$$

Wegen $J\dot{\varphi}_C > 0$ (folgt aus $E_{\min}(\dot{\varphi}_C)$) gilt

$$E''_{\min}(\dot{\varphi}_C) > 0 \iff 4(mga)^2 > J\dot{\varphi}_C^3 (I_3 - I_1). \quad (\text{B.11})$$

Wenn wir den völlig unbedeutenden Fall sehr langsamer Rotation außer acht lassen, so ist Stabilität — wie es auch zu erwarten war — nur für den Fall $I_1 > I_3$ möglich. Die Ungleichung (2.17) garantiert dann die Existenz des entsprechenden Zwischenzustandes.

Bemerkung

Prinzipiell läßt sich der Wert für $\dot{\varphi}_C$ exakt aus (B.5) ermitteln; dies ist allerdings bei Benutzung von Parametern mit außerordentlich hohem Aufwand verbunden. Wir können jedoch einen nochmals verbesserten Näherungswert, welcher den Gravitationsterm enthält, erhalten indem wir eine Entwicklung mit Hilfe der Störungsrechnung vornehmen. Ausgehend von der nullten Näherung aus (B.6), ergibt sich in erster Näherung

$$\dot{\varphi}_C = \frac{J(I_3 - I_1)}{I_1 I_3 (1 - \epsilon^2) - I_1^2} + (mga)^2 \frac{[I_1 I_3 (1 - \epsilon^2) - I_1^2]^2}{[J(I_1 - I_3)]^3}. \quad (\text{B.12})$$

Dies ist übrigens auch der gleiche Wert, den man mit Hilfe des bekannten Newton-Verfahrens im ersten Iterationsschritt erhält. Eine Größenordnungsabschätzung zeigt, daß nur eine geringfügige Änderung eintritt (für das gewählte Beispiel aus unseren numerischen Berechnungen beträgt der Unterschied weniger als ein halbes Prozent). Dies untermauert eindrucksvoll die Qualität unseres Näherungswertes aus Gleichung (B.6) und wird auch durch die Numerik (Abbildung 4.1) bestätigt.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Querschnitt des Kreisels	3
1.2	Kreisel im Inertialsystem (aus [10])	4
1.3	Stehaufkreisel in Ausgangslage und auf dem Stift	4
1.4	Geneigter Kreisel mit Verformung des Bodens	5
1.5	Querschnitt zweier Körper unter dem Wirken von Normalkräften .	6
1.6	Überlagerung von Rotation und Translation	8
1.7	Reibungskraft in Abhängigkeit von u (aus [9])	10
4.1	Zwischenzustand, Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel .	34
4.2	Zwischenzustand, Schwerpunktgeschwindigkeiten	35
4.3	Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel	37
4.4	Eulerwinkel mit Nutationsgeschwindigkeit	38
4.5	Vergleich der Näherungsformeln mit berechneten Werten	39
4.6	Schwerpunktgeschwindigkeiten	41
4.7	Quasierhaltungsgrößen und Reibungstyp	42
4.8	Raumfeste Komponenten der Winkelgeschwindigkeit	44
4.9	Raumfeste Drehimpulskomponenten (Eigendrehimpuls)	45
4.10	Körperfeste Komponenten der Winkelgeschwindigkeit	46
4.11	Gezoomte Darstellung mit Verhältnis der Auflagekräfte	48
4.12	Winkelgeschwindigkeiten und Neigungswinkel gezoomt	49

Literaturverzeichnis

- [1] N. M. Hugenholtz,
On tops rising by friction,
Physica **XVIII**, 515 (1952).
- [2] C. M. Braams,
On the influence of friction on the motion of a top,
Physica **XVIII**, 509 (1952).
- [3] D. G. Parkyn,
The Rising of Tops with Rounded Pegs
Physica **XXIV**, 313 (1958).
- [4] R. Mertens, L. De Corte,
An Exact Mathematical Solution of the Problem of Tops Rising by Friction,
ZAMM **58**, T 116 (1978),
- [5] R. J. Cohen,
The tippe top revisited,
Am. J. Phys. **45**, No.1, 12 (1977).
- [6] A. C. Or,
The dynamics of a Tippe Top,
SIAM **54**, No.3, 597 (1994).
- [7] H. Leutwyler,
Why some top tip,
European J. Phys. **15**, 59 (1994).
- [8] S. Ebenfeld, F. Scheck,
A new Analysis of the Tippe Top,
Annals of Physics **243**, 195, 217 (1995).
- [9] F. Kuypers,
Klassische Mechanik,
3. Auflage VCH-Verlagsgesellschaft, 1990.

-
- [10] C. Friedl,
Der Stehaufkreisel,
Diplomarbeit, Regensburg, 1991.
- [11] L. D. Landau, E.M. Lifschitz,
Bd.VII: *Elastizitätstheorie*,
5. Auflage Akademie-Verlag Berlin, 1983.
- [12] I. Szabó,
Höhere Technische Mechanik,
5. Auflage Springer Verlag, 1972.
- [13] E. A. Jackson,
Perspectives of nonlinear dynamics Vol. 1,
Cambridge University Press, 1991.
- [14] M. & A. Korn,
Mathematical Handbook for Scientists and Engineers,
McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [15] K. Magnus,
Kreisel – Theorie und Anwendungen,
Springer Verlag, 1971.
- [16] L. D. Landau, E.M. Lifschitz,
Bd. I: *Mechanik*,
13. Auflage Akademie-Verlag Berlin, 1990.

Danksagung

Zum Abschluß möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die mich beim Anfertigen dieser Arbeit auf so vielfältige Weise unterstützt haben.

Bei meinen Diplomandenkollegen seien stellvertretend Gerd Koboldt, Markus Schreier, André Wobst, Ludwig Hartmann und Wolfgang Hager genannt, welche mir insbesondere bei technischen Fragestellungen hilfreich zur Seite gestanden sind.

Hervorzuheben ist ferner die umfassende Unterstützung durch den zukünftigen Doktor der Physik, Sigmund Kohler, welcher die Arbeit kritisch gelesen hat und dessen Verbesserungsvorschläge in die Gestaltung eingeflossen sind.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Kuypers bedanken, der mich zuerst auf dieses wunderbare Thema geführt hat und aus dessen Buch einige der Abbildungen stammen.

Mein ganz besonderer Dank gilt aber Herrn Prof. Dr. G.-L. Ingold, welcher sich stets Zeit genommen hat für auftretende Fragen und Diskussionen und viel Geduld und Entgegenkommen gezeigt hat, wenn die Arbeit nicht wie erwartet voranging. Diese engagierte und beispielhafte Betreuung verdient eine besondere Erwähnung und ermöglichte zusammen mit der ehrlichen und freundlichen Art ein sehr angenehmes Arbeiten.

Schließlich sei noch einmal allen Mitarbeitern des Instituts für ihre umfassende Hilfe und ihrem individuellen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit gedankt.